Prof. Dr. Volker Schmidt
Gerd Gaiselmann, Aaron Spettl

WS 2010/11
09.12.2010

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 8

(Abgabe: Donnerstag, 16.12.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Angenommen, Sie stehen in einer Warteschlange vor einem Schalter. Die Bedienzeiten in Minuten am Schalter seien unabhängig und $\text{Exp}(\lambda)$-verteilt für ein $\lambda > 0$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde vor Ihnen mindestens doppelt so viel Zeit am Schalter verbringt wie Sie?

(b) Wenn der Kunde vor Ihnen 5 Minuten am Schalter benötigte, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 5 Minuten am Schalter stehen?

Aufgabe 2 (1 + 2 + 2 Punkte)

Sei U eine über dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable und sei $X \sim N(0,1)$ standardnormalverteilt.

(a) Bestimmen Sie die Dichte von U^2.

(b) Bestimmen Sie die Dichte von $Y = -(1/\lambda)\log U$ für $\lambda > 0$.

(c) Bestimmen Sie die Dichte von $Y = e^X$.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $X_1 + \ldots + X_n$

(a) Binomialverteilt ist mit Parametern $m = m_1 + \cdots + m_n$ und $p = p_1^2 + \cdots + p_n^2$, falls $X_i \sim \text{Bin}(m_i, p)$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Erlang-verteilt ist mit den Parametern n und λ, falls $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(c) Normalverteilt ist mit Parametern $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$ und $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$, falls $X_i \sim \text{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

(**Hinweise:**
Es darf Theorem 3.17 verwendet werden.
Desweiteren nennt man eine absolutstetige Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & \text{, falls } x > 0\,, \\ 0 & \text{, falls } x \leq 0\,, \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, Erlang-verteilt mit den Parametern n und λ.)

Aufgabe 4 (3 + 2 + 2 Punkte)

Das Gewicht leerer Flaschen sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 100$ und $\sigma^2 = 25$. Die Abfüllung wird folgendermaßen durchgeführt: die Flaschen werden auf eine Waage gestellt. Die Zufuhr wird dann abgestellt, wenn das Gesamtgewicht 610 erreicht wird. Die Flaschen seien so groß, dass das Überlaufen praktisch ausgeschlossen werden kann.

(a) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable des Füllgewichts, falls das Gesamtgewicht exakt 610 ist?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt der Inhalt mindestens 500?

(c) Bei Erreichen des Gesamtgewichts 610 kann im allgemeinen der Zulauf nicht exakt gestoppt werden. Der Fehler des Gesamtgewichts der Flasche sei $\text{N}(0,2)$-verteilt und unabhängig vom Flaschengewicht. Welche Verteilung hat in diesem Fall das Füllgewicht?