Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser
D. Neuhäuser

Wintersemester 2010
03. November 2010

Zufällige Mengen und Integralgeometrie – Übungsblatt 1

Diskussion der Lösungen am 10. November 2010

Dieses Übungsblatt und alle Infos zur Vorlesung gibt es unter
http://www.uni-ulm.de/index.php?id=27033.

Aufgabe 1
Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen eines metrischen Raumes (A,ρ) heißt Cauchy-Folge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Zeige, dass der Raum $\mathcal{K}_0$ der nichtleeren kompakten Mengen in $\mathbb{R}^d$ mit der Hausdorff-Metrik

$$\rho(C_1, C_2) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : C_1 \subset C_2 \oplus B_\varepsilon(0) \text{ und } C_2 \subset C_1 \oplus B_\varepsilon(0)\}, \quad C_1, C_2 \neq \emptyset,$$

vollständig ist, d.h. dass jede Cauchy-Folge $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}_0$ gegen einen Grenzwert in $\mathcal{K}_0$ konvergiert.

Aufgabe 2
Die Definition der Hausdorff-Metrik ρ kann auf ganz $\mathcal{K}$ erweitert werden, indem

$$\rho(C_1, C_2) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } C_1 = \emptyset, C_2 \neq \emptyset \text{ oder } C_1 \neq \emptyset, C_2 = \emptyset \\ 0, & \text{falls } C_1 = C_2 = \emptyset \end{cases}$$

gesetzt wird.

a) Zeige, dass die Abbildung $\operatorname{conv} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $C \mapsto \operatorname{conv}(C)$, die jeder kompakten Menge ihre konvexe Hülle zuordnet, stetig ist bezüglich der Hausdorff-Metrik.

b) Seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ Zufallsvektoren. Zeige, dass $\Xi = \operatorname{conv}\{X_1, \dots, X_n\}$ eine zufällige kompakte Menge ist.

Aufgabe 3
Sei $\{\xi_t : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und stetigen Pfaden. Das heißt insbesondere, dass die Abbildungen $\xi_t : \Omega \to \mathbb{R}$ für alle $t \geq 0$ Borel-messbar sind. Zeige, dass $\Xi = \{t \geq 0 : \xi_t = 0\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge ist.
Hinweis: Benutze, dass eine Abbildung $\Xi : \Omega \to \mathcal{F}$ in den Raum der abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^d$ genau dann messbar ist, wenn $\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ für alle offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^d$.