Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser
D. Neuhäuser

Wintersemester 2010
10. November 2010

Zufällige Mengen und Integralgeometrie – Übungsblatt 2

Diskussion der Lösungen am 22. November 2010

Dieses Übungsblatt und alle Infos zur Vorlesung gibt es unter
http://www.uni-ulm.de/index.php?id=27033.

Aufgabe 1

a) Zeige, dass jede nichtleere stationäre zufällige abgeschlossene Menge Ξ fast sicher unbeschränkt ist.

b) Sei Ξ eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge mit $T_\Xi(\{0\}) = 1$. Zeige, dass dann $P\left(\Xi = \mathbb{R}^d\right) = 1$.

Aufgabe 2

Sei Ξ eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge und sei $q(x) = P(0 \in \Xi, x \in \Xi)$. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$q(-x) = q(x) = 2T_\Xi(\{0\}) - T_\Xi(\{0, x\}) .$$

Aufgabe 3

Sei Ξ eine zufällige abgeschlossene Menge.

a) Zeige folgende Konkavitätseigenschaft des Kapazitätsfunktionals T_Ξ:

$$T_\Xi(K_1 \cap K_2) + T_\Xi(K_1 \cup K_2) \leq T_\Xi(K_1) + T_\Xi(K_2) ,$$

für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$.

b) Sei Ξ fast sicher konvex. Zeige, dass dann gilt:

$$T_\Xi(K_1 \cap K_2) + T_\Xi(K_1 \cup K_2) = T_\Xi(K_1) + T_\Xi(K_2) ,$$

für alle konvexen kompakten Mengen $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^d$, deren Vereinigung $K_1 \cup K_2$ ebenfalls konvex ist.

Aufgabe 4

a) Sei μ ein lokal endliches und diffuses Maß auf $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Welche zufällige abgeschlossene Menge Ξ hat das Kapazitätsfunktional $T_\Xi(K) = 1 - \exp(-\mu(K))$?

b) Sei Y eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Berechne das Kapazitätsfunktional der zufälligen abgeschlossenen Menge $\Xi = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq Y\}$.

c) Sei N ein zufälliges, einfaches und lokal endliches Zählmaß auf $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zeige, dass die Verteilung von N vollständig durch die Leerwahrscheinlichkeiten $P(N(K) = 0)$, $K \in \mathcal{K}$, bestimmt ist.