Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser
D. Neuhäuser

Wintersemester 2010
22. November 2010

Zufällige Mengen und Integralgeometrie – Übungsblatt 3

Diskussion der Lösungen am 29. November 2010

Dieses Übungsblatt und alle Infos zur Vorlesung gibt es unter
http://www.uni-ulm.de/index.php?id=27033.

Aufgabe 1
Seien X, Y zwei zufällige abgeschlossene Mengen. Zeige, dass folgende Größen auch zufällige abgeschlossene Mengen sind:

a) $\operatorname{conv}(X)$

b) $\overline{X^C}$, $\overline{\operatorname{int} X}$, ∂X

c) αX mit einer Zufallsvariable α

d) $X \cup Y$, $X \cap Y$

e) $\overline{X \oplus Y}$

Aufgabe 2

a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt *sublinear*, falls gilt:
- f ist positiv homogen vom Grad 1, d.h. für alle $a > 0$ ist $f(ax) = af(x)$.
- f ist subadditiv, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Beweise folgende Aussage: Zu jeder sublinearen Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gibt es einen eindeutigen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}$ mit Stützfunktion f.

b) Zeige, dass die Stützfunktion Minkowski-additiv ist, d.h. zeige, dass für beliebige konvexe Körper K und L gilt

$$h_{K \oplus L}(u) = h_K(u) + h_L(u), \qquad u \in \mathbb{R}^d \setminus \{o\}.$$

Aufgabe 3

a) Bestimme den Aumann-Erwartungswert der ZAM $X = [-v, v]$ auf dem atomfreien Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$ mit $\varphi \sim U[0, 2\pi)$
- über die Definition des Aumann-Erwartungswertes.
- mit Hilfe von Satz 1.3.1 aus der Vorlesung.

b) Bestimme den Aumann-Erwartungswert der ZAM $X = [-v_1, v_1] \oplus \cdots \oplus [-v_k, v_k]$, wobei $v_i = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)^\top$ mit $\varphi_i \sim U\,[0, 2\pi)$, $i = 1, \ldots, k$.

c) Bestimme den Aumann-Erwartungswert der ZAM $X = [-v, v]^2$, wobei $v \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

Aufgabe 4

Gib ein Beispiel für zwei verschiedene zufällige abgeschlossene Mengen mit gleicher Verteilung aber verschiedenen Aumann-Erwartungswerten.