Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser
D. Neuhäuser

Wintersemester 2010
06. Dezember 2010

Zufällige Mengen und Integralgeometrie – Übungsblatt 5

Diskussion der Lösungen am 13. Dezember 2010

Dieses Übungsblatt und alle Infos zur Vorlesung gibt es unter
http://www.uni-ulm.de/index.php?id=27033.

Aufgabe 1
Ein Schneiderlein brüstet sich mit der Behauptung, sieben auf einen Streich erschlagen zu haben. Genauere Nachforschungen ergaben folgendes Bild: Bei den Dahingeschiedenen handelte es sich um Fliegen, die sich auf einem Marmeladenbrot des Schneiderleins niedergelassen hatten. Das Tatwerkzeug war eine Fliegenklatsche mit einer Klatschfläche von konvexer Form. Wie die Spurenauswertung auf besagtem Brot zeigte, war es zumindest möglich, jeweils drei der Opfer, in welcher Auswahl auch immer, auf einen Streich zu erschlagen, und dabei musste die Fliegenklatsche nicht einmal gedreht werden (d.h. der Stiel wies immer in die gleiche Richtung).
Kann es sein, dass das Schneiderlein die Wahrheit sprach?

Hinweis: Satz von Helly: Seien $A_1, \ldots, A_m$ konvexe Körper in $\mathbb{R}^d$ mit $m \geq d+1$. Falls beliebige $d+1$ der Mengen $A_1, \ldots, A_m$ nichtleeren Schnitt haben, gilt $\bigcap_{i=1}^m A_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 2
Ein allgäuer Bauer hat ein Herde glücklicher Kühe, bestehend aus schwarzen und weißen Tieren. Eines Tages kommt der Bauer zur Weide und sieht dort alle Kühe seiner Herde müde in der Sonne liegen und dösen. Der Bauer stellt fest, dass je vier beliebig herausgegriffene Kühe sich durch einen geraden Zaun in weiße und schwarze Tiere trennen lassen.
Gibt es dann auch einen geraden Zaun, der alle schwarzen von allen weißen Tieren trennt?

Hinweis 1: Kühe sind träge. Wenn sie in der Sonne dösen, lassen sie sich durch nichts stören, auch nicht durch einen Zaun, der vor ihren Augen gebaut wird.

Hinweis 2: Satz von Carathéodory: Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ und einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ sind folgende Aussagen äquivalent: 1) $x \in \operatorname{conv}(A)$ 2) Es gibt ein r-Simplex S (für ein $r \in \{0, \ldots, d\}$) mit Eckpunkten in A, so dass $x \in \operatorname{conv}(S)$.

Hinweis 3: Ein r-Simplex ist die konvexe Hülle von $r+1$ affin unabhängigen Punkten. Punkte $x_1, \dots, x_k$ heißen affin unabhängig, falls keiner von ihnen eine affine Kombination der anderen $k-1$ Punkte ist, d.h. falls aus $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Ein 0-Simplex ist ein Punkt, ein 1-Simplex ist ein Geradensegment, ein 2-Simplex ist ein Dreieck, etc.

Aufgabe 3
Zeige, dass sich die inneren Volumina eines Polytops $P \subset \mathbb{R}^d$ wie folgt darstellen lassen:

$$V_j(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma(F, P)\, \nu^{(j)}(F), \qquad j = 0, \dots, d.$$

Hinweis:
Sei P ein Polytop und E eine Stützhyperebene an P. Die Menge $F = P \cap E$ heißt Seite von P (genauer: k-Seite, wenn $\dim F = k$). Zum Beispiel sind die 0-Seiten die Eckpunkte von P und die d-Seite ist P selbst. $\mathcal{F}_k(P)$ bezeichne die Menge aller k-Seiten von P. Für $F \in \mathcal{F}_k(P)$ sei ν_F das auf F eingeschränkte k-dimensionale Lebesgue-Maß auf der affinen Hülle $\operatorname{aff} F$ von F. Mit $\operatorname{relint} F$ wird das relative Innere von F (bezüglich der affinen Hülle von F) bezeichnet.

Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein Polytop, $F \in \mathcal{F}_k(P)$, $0 \le k < d$, $x \in \operatorname{relint} F$, $L \in \mathcal{L}_{d-k}^d$ orthogonal zu F. $N(P, F) \subset L$ bezeichne den Normalenkegel von P in F, d.h. die Menge aller äußeren Normalenvektoren von Stützhyperebenen an P in x und $\omega^{(L)}$ sei das sphärische Lebesgue-Maß auf $L \cap \mathbb{S}^{d-1}$. Der äußere Winkel von P bei F ist definiert durch

$$\gamma(F, P) = \frac{\omega^{(L)}\left(N(P, F) \cap \mathbb{S}^{d-1}\right)}{\omega^{(L)}\left(L \cap \mathbb{S}^{d-1}\right)}.$$

Setze $\gamma(P, P) = 1$.

Sei $K \neq \emptyset$ ein konvexer Körper, $\varepsilon \ge 0$, $A \subset \mathbb{R}^d$. Die lokale Parallelmenge von K ist definiert durch

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(K, A) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x - p_K(x)\| \le \varepsilon, p_K(x) \in A \right\} \\ &= p_K^{-1}(A) \cap (K \oplus B_\varepsilon(o)). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $p_K(x)$ die orthogonale Projektion von x auf K. Für ein Polytop P und $F \in \mathcal{F}_j(P)$ gilt

$$\nu(U_\varepsilon(P, \operatorname{relint} F)) = \varepsilon^{d-j} \kappa_{d-j} \gamma(F, P)\, \nu^{(j)}(F),$$

wobei $\nu^{(j)}$ das j-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet.