Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Daniel Meschenmoser
Dipl.-Math. David Neuhäuser

WS 2010/11
14.2.2011

Zufällige Mengen und Integralgeometrie - Übungsblatt 12

Diskussion der Lösungen am 21. Februar 2011

Aufgabe 1

Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein d-dimensionales Polytop und sei $f_i(P)$ die Anzahl der i-dimensionalen Facetten von P. Beweisen Sie die Euler-Poincaré Formel:

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(P) = 1 + (-1)^{d-1}.$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass für die polare Menge A^* einer nichtleeren Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ folgende Eigenschaften gelten:

1. Wenn $A = \mathbb{R}^d$, dann $A^* = \{0\}$.
2. Wenn $A \subset B$, dann $B^* \subset A^*$.
3. $(\alpha A)^* = \alpha^{-1} A^*, \ \alpha > 0$.
4. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^* = \bigcap_{i \in I} A_i^*$.
5. $A \subset (A^*)^*$.

b) Beweisen Sie das Bipolar-Theorem: Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, die den Ursprung enthält. Dann gilt: $A = (A^*)^*$.

Aufgabe 3

Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik im $\mathbb{R}^d$ mit i-Facetten $X^{(i)}$. Dann gilt für $j \in \{0, ..., d-1\}$:

$$\sum_{i=j}^{d} (-1)^i d_j^{(i)} = 0,$$

wobei $d_j^{(i)} = \lim\limits_{\rho \to \infty} \frac{1}{V_d(\rho B_1(0))} \mathbb{E} \sum_{F \in X^{(i)}} V_j(F \cap \rho B_1(0))$.

Hinweis: Seien $S_1, \ldots, S_p$ die Zellen von X, die $B_1(0)$ treffen. Zeigen Sie zunächst, dass

$$V_j(B_1(0)) = \sum_{i=j}^{d} \sum_{F \in X^{(i)}} V_j(F \cap B_1(0)) \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} \nu(F, r),$$

wobei $\nu(F, r) = \left|\{I \subset \{1, \ldots, p\} : |I| = r, \bigcap_{l \in I} S_\ell = F\}\right|$. Folgern Sie dann unter Benutzung der Identität

$$\sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} \nu(F, r) = (-1)^{d - dim(F)}$$

die Behauptung der Aufgabenstellung.