Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Daniel Meschenmoser
Dipl.-Math. David Neuhäuser

WS 2010/11
24.1.2011

Zufällige Mengen und Integralgeometrie - Übungsblatt 10

Diskussion der Lösungen am 31. Januar 2011

Aufgabe 1

Seien $X_1, ..., X_n$ i.i.d. zufällige Punkte im $\mathbb{R}^d$, deren Verteilung symmetrisch zum Ursprung ist und die jeder Hyperebene durch den Ursprung das Maß 0 zuordnet.
Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$\mathbb{P}(0 \notin conv\{X_1, ..., X_n\}) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k}. \tag{1}$$

Hinweis:
$H_1, ..., H_n \subset \mathbb{R}^d$ heißen Hyperebenen durch den Ursprung in allgemeiner Lage, falls $\forall M \subset \{H_1, ..., H_n\}$, $|M| \leq d$ gilt, dass die Ebenen aus M linear unabhängige Normalenvektoren haben. Dabei besteht $\mathbb{R}^d \setminus (H_1 \cup ... \cup H_n)$ aus endlich vielen verbundenen Komponenten, genannt Zellen induziert von $H_1, ..., H_n$. Deren Anzahl sei mit $C(n, d)$ bezeichnet.
Folgendes Resultat darf nun benutzt werden:

$$C(n, d) = 2 \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k}$$

Bearbeiten Sie für den Beweis obiger Identität (1) folgende Teilaufgaben:

a) Bezeichne ϕ die Verteilung von X_i. Definieren Sie sich die Funktion

$$g(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_1, ..., x_n \text{ in einem offenen Halbraum} \\ & \text{liegen, dessen Rand die 0 enthält,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(0 \notin conv\{X_1, ..., X_n\}) = \int_{\mathbb{R}^d} ... \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon_i \in \{-1,1\}} g(\epsilon_1 x_1, ..., \epsilon_n x_n) \phi(dx_1) ... \phi(dx_n).$$

b) Zeigen Sie, dass $\sum_{\epsilon_i \in \{-1,1\}} g(\epsilon_1 x_1, ..., \epsilon_n x_n) = C(n, d)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Efron'schen Identität: Sei $K \neq \emptyset$, $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit inneren Punkten und seien $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{\mathbb{E} V_d(K_{n-1})^k}{V_d(K)^k} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{f_0(K_{n-1+k})}{n-1+i}\right).$$

Hinweis: Zerlegen Sie den Beweis in die folgenden drei Teilschritte:

- Seien $\{X_1, ..., X_{n-1+k}\}$ unabhängige, gleichverteilte zufällige Punkte in K und sei $P_{n-1,k}$ die Anzahl k-elementiger Teilmengen von $\{X_1, ..., X_{n-1+k}\}$, die in der konvexen Hülle der verbleibenden $n-1$ Punkte enthalten sind. Zeigen Sie, dass $P_{n-1,k} = \binom{n-1+k-f_0(n-1+k)}{k}$ gilt.

- Sei $p_{n-1,k}$ die Wahrscheinlichkeit, dass $\{X_1, ..., X_k\}$ in der konvexen Hülle von $\{X_{k+1}, ..., X_{k+n-1}\}$ liegen. Zeigen Sie, das $p_{n-1,k} = \mathbb{E}\left(\frac{V_d(K_{n-1})^k}{V_d(K)^k}\right)$.
- Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}P_{n-1,k} = \binom{n-1+k}{k} p_{n-1,k}$ und folgern Sie aus den bisherigen Ergebnissen die Aussage.