Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Daniel Meschenmoser
Dipl.-Math. David Neuhäuser

WS 2010/11
31.1.2011

Zufällige Mengen und Integralgeometrie - Übungsblatt 11

Diskussion der Lösungen am 7. Februar 2011

Aufgabe 1

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, zufällige Punkte, die in K gleichverteilt sind und sei $K_n = conv\{X_1, ..., X_n\}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl $f_0(K_n)$ der Ecken von K_n folgende Verteilung besitzt:

$$\mathbb{P}(f_0(K_n) = k) = \binom{n}{k} \sum_{j=d+1}^{k} (-1)^{j+k} \binom{k}{j} \frac{\mathbb{E}V_d(K_j)^{n-j}}{V_d(K)^{n-j}}, \quad \text{für } n \geq d+1 \text{ und } k \in \{1, ..., n\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie noch einmal das Ende des Beweises von Aufgabe 2 auf Blatt 10.

Aufgabe 2

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, zufällige Punkte, die in K gleichverteilt sind und sei $K_n = conv\{X_1, ..., X_n\}$. Zeigen Sie, dass für die Varianz des Volumens von K_n folgende Abschätzung nach oben gilt:

$$\mathrm{Var}(V_d(K_n)) \leq (n+1)\mathbb{E}(V_d(K_{n+1}) - V_d(K_n))^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Efron-Stein-Ungleichung.

Aufgabe 3

Sei durch $I(d, q, k)$ (bis auf Normierung) das k-te Moment des q-dimensionalen Volumens eines Spats gegeben, der durch q unabhängige und in $B_1(0)$ gleichverteilte Zufallsvektoren aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass dann folgende Identität gilt:

$$I(d, q, k) := \int_{B_1(0)} ... \int_{B_1(0)} \nabla_q(x_1, ..., x_q)^k \nu_d(dx_1)...\nu_d(dx_q) = \kappa_{d+k}^q \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\omega_{d-j}}{\omega_{d+k-j}},$$

wobei $d \geq 1, 1 \leq q \leq d, k \geq 1$.

Hinweis: Betrachten Sie den Quotienten $\frac{I(d,q,k)}{I(d,q-1,k)}$.