Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Daniel Meschenmoser
Dipl.-Math. David Neuhäuser

WS 2010/11
17.1.2011

Zufällige Mengen und Integralgeometrie - Übungsblatt 9

Diskussion der Lösungen am 24. Januar 2011

Aufgabe 1

a) Seien $K \in \mathcal{R}$ und G ein IUR-Gitter von parallelen Geraden mit Abstand h. Zeigen Sie, dass der *Steinhaus-Schätzer* $\pi h V_0(K \cap G)$ ein unverzerrter Schätzer für den Umfang der Menge K ist, d.h., dass folgende Identität gilt:

$$\mathbb{E}(V_0(K \cap G)) = \frac{2}{\pi h} V_1(K).$$

b) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei $\mathcal{T} = \{T_{U+kh} : k \in \mathbb{Z}\}$, wobei $T_s = \{(x, y) : y = s\}$ und U gleichverteilt auf $[0, h)$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{V}_2(K) = h \sum_k \nu_1(K \cap T_{U+kh})$$

ein unverzerrter Schätzer für die Fläche $V_2(K)$ von K ist.

Aufgabe 2

Sei $d = 3$, $K \in \mathcal{R}$ enthalten in $A \in \mathcal{K}$ und sei $L_0 \in \mathcal{L}_1^3$. Sei ferner H eine vertikal gleichverteilte Ebene in A mit vertikaler Achse L_0. Zeigen Sie, dass

$$2\hat{V}_2(K) = 2V_1(Pr_{L_0^\perp}(A)) \int_{E \in \mathcal{E}_1^H : E \cap A \neq \emptyset} V_0(K \cap E)[E, L_0] dE$$

ein unverzerrter Schätzer der Oberfläche $2V_2(K)$ von K ist.

Aufgabe 3

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, $T_a = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \omega \rangle = a\}$, $\omega \in S_+^2$, $U \sim U([0, h))$ und sei $\mathcal{J} = \{J_{U+kh} : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $J_{U+kh} = T_{U+kh} \oplus [0, d \cdot \omega]$, $0 < d < h$ (also eine Platte der Dicke d mit Normalenvektor ω). Zeigen Sie, dass

$$\hat{V}_3(K) = \frac{h}{d} \sum_k V_3(K \cap J_{U+kh})$$

ein unverzerrter Schätzer für $V_3(K)$ ist.