Jun.-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Chao Lu

WS 2011/2012
12. Januar 2012

# Extremwerttheorie

## Übungsblatt 11

Abgabe: 19. Januar 2012

### Aufgabe 1

Sei $\pi$ ein Poisson-Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $\mu$. Seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ disjunkte Borel-Mengen mit $A = \cup_{i=1}^n A_i$. Zeigen Sie, dass für alle $k_1, \dots, k_n, k \in \{0, 1, \dots\}$ mit $k_1 + \dots + k_n = k$ gilt

$$\mathbb{P}[\pi(A_1) = k_1, \dots, \pi(A_n) = k_n | \pi(A) = k] = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} \left( \frac{\mu(A_1)}{\mu(A)} \right)^{k_1} \dots \left( \frac{\mu(A_n)}{\mu(A)} \right)^{k_n}.$$

*Bemerkung.* Diese Aussage lässt sich wie folgt interpretieren: Gegeben, dass die Menge $A$ genau $k$ Punkte des Poisson-Punktprozesses enthält, sind die Punkte in den jeweiligen Teilmengen $A_1, \dots, A_n$ gemäß einer Polynomialverteilung mit Parameter $\left( \frac{\mu(A_1)}{\mu(A)}, \dots, \frac{\mu(A_n)}{\mu(A)} \right)$ verteilt.

### Aufgabe 2

Es sei $\rho$ ein Poisson-Punktprozess auf $\mathbb{R}^3$, dessen Intensitätmaß das Lebesgue-Maß ist. Für $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichne mit $|x|$ den Abstand von $x$ zum Koordinatenursprung. Die Punkte von $\rho$ seien mit $X_1, X_2, \dots$ bezeichnet, wobei die Nummerierung so gewählt sei, dass $|X_1| < |X_2| < \dots$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $|X_n|$.

*Hinweis.* Das Volumen einer Kugel vom Radius $r$ ist $\frac{4}{3}\pi r^3$.

### Aufgabe 3

Seien $\nu$ ein Maß auf $\mathbb{R}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Borel-Menge. Die Einschränkung von $\nu$ auf $A$ ist ein Maß $\nu_{|A}$ definiert durch $\nu_{|A}(B) = \nu(A \cap B)$ für alle Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$. Sei $\pi$ ein Poisson-Punktptozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $\mu$. Zeigen Sie, dass $\pi_{|A}$ ein Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß $\mu_{|A}$ ist.