

Extremwerttheorie

Übungsblatt 12

Abgabe: Mittwoch, 1. Februar 2012 (in zwei Wochen!)

Aufgabe 1

Es sei π ein Poisson-Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Intensität μ und f eine nichtnegative Borel-Funktion auf \mathbb{R}^d . Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}S_f^2 = \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x)d\mu(x) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\mu(x) \right)^2, \text{ wobei } S_f = \sum_{x \in \pi} f(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie die zweite Ableitung von $\log \mathbb{E}[e^{-\theta S_f}]$ an der Stelle $\theta = 0$. Bitte beachten Sie, dass die Form, in der diese Aufgabe in der Vorlesung gestellt wurde, falsch ist.

Aufgabe 2

Seien $X_i, i \in \mathbb{Z}$, die Punkte eines Poisson-Punktprozesses auf \mathbb{R}^3 , dessen Intensität das Lebesgue-Maß ist. Zeigen Sie, dass die Punkte $|X_i|$ einen Poisson-Punktprozess auf \mathbb{R} bilden und geben Sie die Dichte seines Intensitätsmaßes an. Dabei ist $|x|$ der Abstand von x zum Ursprung.

Aufgabe 3

Sei μ ein Maß auf \mathbb{R} mit Dichte $e^{-x}x^{-1}1_{x>0}$ und es sei $\pi \sim \text{PPP}(\mu)$.

- Zeigen Sie, dass die Anzahl der Punkte von π in jedem Intervall der Form $(0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ fast sicher unendlich ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Anzahl der Punkte von π in jedem Intervall der Form (ε, ∞) mit $\varepsilon > 0$ fast sicher endlich ist.
- Es folgt, dass man die Punkte von π absteigend nummerieren kann: $X_1 > X_2 > \dots > 0$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ standard exponentialverteilt ist, d.h. $\mathbb{P}[S > t] = e^{-t}$ für $t > 0$.

Hinweis zu Teil (b): Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}[e^{-\theta S}]$.

Aufgabe 4

Unendlich viele Autos bewegen sich auf einer geraden Straße. Die Positionen der Autos zum Zeitpunkt 0 bilden einen homogenen Poisson-Punktprozess mit Intensität 1 (d.h. das Intensitätsmaß ist das Lebesgue-Maß). Die Geschwindigkeiten der Autos seien dabei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die auch von den Startpositionen der Autos unabhängig sind. (Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeiten zeitlich konstant bleiben). Zeigen Sie, dass die Positionen der Autos zu einem beliebigen Zeitpunkt t auch einen homogenen Poisson-Punktprozess mit Intensität 1 bilden.

Hinweis: Für jedes Auto i seien x_i seine Startposition und v_i seine Geschwindigkeit. Betrachten Sie (x_i, v_i) als Punkte eines Poisson-Punktprozesses in \mathbb{R}^2 .