Jun.-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Chao Lu

WS 2011/2012
27. Oktober 2011

Extremwerttheorie

Übungsblatt 2

Abgabe: 3. November 2011

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t) = t^\alpha e^{c(\log t)^\beta}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta < 1$, $c \in \mathbb{R}$ regulär variierend in $+\infty$ ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $h(t) = 2 + \sin t$ nicht regulär variierend in $+\infty$ ist.

Aufgabe 2

In der Versicherungsmathematik wird für die Modellierung der Schadenhöhen die sogenannte Burr-Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \left(\frac{C}{C + t^\beta}\right)^\alpha, \quad t \geq 0, \quad (F(t) = 0 \text{ für } t \leq 0)$$

verwendet. Dabei sind $C > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ Parameter. Zeigen Sie, dass die Burr-Verteilung im Max-Anziehungsbereich einer Fréchet-Verteilung liegt.

Aufgabe 3

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $x^* = \sup\{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\}$. Zeigen Sie, dass M_n *fast sicher* gegen x^* konvergiert.

Aufgabe 4

Es seien $c, \varepsilon : (0, \infty) \to (0, \infty)$ zwei Funktionen mit $\lim_{t\to+\infty} c(t) = c \in (0, \infty)$ und $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$L(t) = c(t) \exp\left\{\int_1^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds\right\}$$

langsam variierend in $+\infty$ ist.

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung: jede langsam variierende Funktion L lässt sich in der obigen Form schreiben (Karamata-Darstellung).