Jun.-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Chao Lu

WS 2011/2012
17. November 2011

# Extremwerttheorie

## Übungsblatt 5

Abgabe: 24. November 2011

### Aufgabe 1

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit der Gumbel-Verteilungsfunktion $G(t) = e^{-e^{-t}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $e^X$ eine Fréchet-Verteilung mit Verteilungsfunktion $e^{-1/t}$, $t > 0$, hat.

(b) Zeigen Sie, dass $-e^{-X}$ eine Weibull-Verteilung mit Verteilungsfunktion $e^t$, $t < 0$, hat.

### Aufgabe 2

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Beta$(\alpha, \beta)$-Verteilung, d.h. die Dichte von $X_i$ sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, & \text{für } t \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$ die Euler'sche Beta-Funktion und $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sind Parameter. Geben Sie explizit Konstanten $a_n, b_n$ sowie eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion $G$ an mit

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G.$$

### Aufgabe 3

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und standard normalverteilt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\sqrt{2\log n}} = 1 \qquad \text{fast sicher.}$$

*Hinweis:* Benutzen Sie das Lemma von Borel–Cantelli. Sie können auch die Relation $\mathbb{P}[X_n > t] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-t^2/2}$ für $t \to +\infty$ benutzen.