Jun.-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Chao Lu

WS 2011/2012
24. November 2011

Extremwerttheorie

Übungsblatt 6

Abgabe: 1. Dezember 2011

Aufgabe 1

Es seien $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen. Die Zufallsvariable N sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ seien exponentialverteilt mit Parameter 1, d.h. $\mathbb{P}[X_i \geq t] = e^{-t}$ für $t > 0$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von

$$M := \max\{X_1, \ldots, X_N\}.$$

Aufgabe 2

Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - (1-t)^\alpha, & t \in [0,1], \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$. Geben Sie explizit eine Funktion $a(u)$ und eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion G an, so dass für $u \uparrow 1$ die bedingte Verteilung von $a(u)(X-u)$ gegeben dass $X > u$ gegen G konvergiert:

$$\lim_{u \uparrow 1} \mathbb{P}[a(u)(X-u) \leq t \,|\, X > u] = G(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{1/t}, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F im Max-Anziehubgsbereich der Gumbel-Verteilung liegt (obwohl der rechte Endpunkt endlich ist) und geben Sie explizit Konstanten a_n, b_n an mit

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - a_n}{b_n} \leq t\right] = e^{-e^{-t}} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$