Jun.-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Chao Lu

WS 2011/2012
8. Dezember 2011

Extremwerttheorie

Übungsblatt 8

Abgabe: 15. Dezember 2011

Aufgabe 1

Seien $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Z_i > t] = e^{-t}$, $t > 0$. Zeigen Sie, dass für die Ordnungstatistiken $Z_{1:n} \leq \ldots \leq Z_{n:n}$ gilt

(a) $\mathbb{E}[Z_{k:n}] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-k+1}$.

(b) $\operatorname{Var}[Z_{k:n}] = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)^2}$.

(c) $\operatorname{Cov}(Z_{k:n}, Z_{l:n}) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)^2}$ falls $k \leq l$.

Freiwillig: Zeigen Sie, dass für eine Gumbel-verteilte Zufallsvariable G mit Verteilungsfunktion $e^{-e^{-t}}$ gilt: $\mathbb{E}G = \gamma$ und $\operatorname{Var} G = \pi^2/6$, wobei $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n)$ die Euler-Konstante ist.

Aufgabe 2

Seien $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion des Vektors (M_n, M_{n+1}), wobei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $M_{n+1} = \max\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$.

Aufgabe 3

Es seien $U_1, \ldots, U_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$T_1 := \frac{U_{1:n}}{U_{2:n}}, \quad T_2 := \left(\frac{U_{2:n}}{U_{3:n}}\right)^2, \ \ldots \ , T_{n-1} := \left(\frac{U_{n-1:n}}{U_{n:n}}\right)^{n-1}, \quad T_n = U_{n:n}^n$$

unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind.