Jun.-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Chao Lu

WS 2011/2012
15. Dezember 2011

Extremwerttheorie

Übungsblatt 9

Abgabe: 22. Dezember 2011

Aufgabe 1

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit Dichtefunktion f. Besimmen Sie die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken $X_{i:n}$ und $X_{j:n}$, wobei $1 \leq i < j \leq n$.

Aufgabe 2

Es seien $U_1, \ldots, U_n$ unabhängige, auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die folgende Verteilungskonvergenz gilt:

$$(nU_{1:n}, \ldots, nU_{k:n}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \ldots, \nu_1 + \ldots + \nu_k),$$

wobei $\nu_1, \nu_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\nu_i > t] = e^{-t}$, $t > 0$, sind (Standardexponentialverteilung). Zeigen Sie auch, dass

$$(n(1 - U_{n:n}), \ldots, n(1 - U_{n-k+1:n})) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \ldots, \nu_1 + \ldots + \nu_k).$$

Aufgabe 3

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (Cauchy-Verteilung). Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}|X_{k:n}| < \infty$ für alle $k = 2, \ldots, n-1$ und $\mathbb{E}|X_{1:n}| = \mathbb{E}|X_{n:n}| = \infty$.