Jun.-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Chao Lu

WS 2011/2012
1. Februar 2012

Extremwerttheorie

Probeklausur

Abgabe: 9. Februar

Die Abgabe ist freiwillig. Sie können damit zusätzliche Punkte verdienen, falls Sie das 50%-Kriterium noch nicht erfüllt haben. In jeder Aufgabe können höchstens 6 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen langsam variierend in $+\infty$ sind:

(a) $f(t) = (\log t)^5$.

(b) $g(t) = (\log t)^{\log t}$.

Aufgabe 2

Es sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(t) = C\frac{1}{(1+|t|^\alpha)^\beta},$$

wobei $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha\beta > 1$, und C so gewählt wird, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Zeigen Sie, dass für die Tailfunktion von X gilt:

$$\bar{F}(t) \sim \frac{C}{\alpha\beta - 1} t^{1-\alpha\beta}, \qquad t \to +\infty.$$

In welchem Max-Anziehungsbereich liegt X?

Aufgabe 3

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ordnungsstatistiken seien mit $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[n(X_{n-k:n} - 1) \le t] = e^{2t} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-2t)^i}{i!}, \qquad t \le 0.$$

Aufgabe 4

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}[X_i > t] = e^{-t}$, $t > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 1 \qquad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 5

Es sei $N(n)$ die Anzahl der Rekorde zum Zeitpunkt n in einer Folge $X_1, X_2, \ldots$ von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[N(2n) - N(n) = 0].$$

Aufgabe 6

Seien $U_1 > U_2 > \ldots$ die Punkte eines Poisson-Punktprozesses mit Intensität $e^{-t}dt$ auf $\mathbb{R}$. Die Punkte seien absteigend angeordnet. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}(U_n + \log n) = 0$ fast sicher.
Hinweis: Es seien $e_1, e_2, \ldots$ unabhängig mit $\mathbb{P}[e_i > t] = e^{-t}$, $t \ge 0$. Dann bilden die Punkte P_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $P_n = e_1 + \ldots + e_n$ einen Poisson-Punktprozess mit Intensität 1 auf $(0, \infty)$.