Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

WS 2011
25. 10. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze in stoch. Geometrie
- Blatt 1 -

Abgabe am 8. 11. vor der Übung

Aufgabe 1
Es sei $\mathcal{X} := \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ für paarweise verschiedene $\eta_1, \ldots, \eta_n \in [0,1]^d$. Finde wie in der Vorlesung für folgende Funktionen $H : \mathbb{R}^{dn} \to \mathbb{R}$ jeweils eine möglichst einfache Funktion $\xi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dn} \to \mathbb{R}$ mit

$$H(\mathcal{X}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \xi(x, \mathcal{X}).$$

(a) $H(\mathcal{X}) = \lambda\Big([0,1]^d \cap (\bigcup_{x\in\mathcal{X}} B_r(x))\Big)$, (3)

(b) $H(\mathcal{X}) = \lambda\left([0,1]^d \setminus (\bigcup_{x\in\mathcal{X}} B_r(x))\right)$, (3)

(c) $H(\mathcal{X}) = \max_{x\in\mathcal{X}}\{x_1\}$ für $x = (x_1, \ldots, x_d)^T$, (2)

(d) $H(\mathcal{X})$ ist die Länge eines minimalen Spannbaums von $\mathcal{X}$, (3)

(e) $H(\mathcal{X}) = \lambda(\mathrm{conv}(\mathcal{X}))$ ist das Volumen des von der konvexen Hülle von $\mathcal{X}$ umschlossenen Bereichs (hier genügt $d = 2$), (2)

wobei λ das d-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichne und $B_r(x)$ die Kugel mit Radius r um x.

Aufgabe 2
Zeige, dass es unter den Voraussetzungen von Aufgabe 1 für jede Funktion H eine solche Funktion ξ gibt. (2)

Aufgabe 3
Sind folgende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sub- / super-additiv?

(a) $x_n = \log n$, (2)

(b) $x_n = a\,n + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, (2)

(c) $x_n = n^2$. (1)

Aufgabe 4
Zeige, dass das Funktional des traveling-salesman-Problems geometrisch subadditiv ist. (3)