Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

WS 2011
15. 11. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze in stoch. Geometrie

- Blatt 2 -

Abgabe am 22. 11. vor der Übung

Aufgabe 1

(a) Zeige, dass jede vollständig konvergente Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ auch f.s. gegen die gleiche Zufallsvariable konvergiert. (3)

(b) Finde eine Folge von Zufallsvariablen, die f.s. konvergiert, aber nicht vollständig. (3)

Aufgabe 2

Betrachte das MM- (minimal matching) Funktional. Zeige, dass

(a) das MM-Funktional geometrisch subadditiv mit Parameter $p = 1$ ist, (2)

(b) die Randversion des MM-Funktionales superadditiv ist, (1)

(c) das MM-Funktional glatt ist. Bestimme auch die Ordnung der Glattheit. (4)

Hinweis: Beachte, dass bei ungerader Anzahl an Punkten ein Punkt nicht verbunden wird.

Aufgabe 3

Es seien $U_1, \ldots, U_n \sim \mathrm{U}([0,1]^d)$ u.i.v. Zufallsvariablen, wobei $d \geq 2$. Betrachte dazu das Funktional H^ξ des traveling-salesman-Problems bzw. die Rand-Version H^ξ_B.

(a) Wie muss man $H^\xi_B(U_1, \ldots, U_n)$ normieren, damit die Folge gegen einen positiven Grenzwert konvergiert, und welche Konvergenzart erhält man? Gilt das gleiche auch für $H^\xi(U_1, \ldots, U_n)$? (2)

(b) Gib eine obere und untere Schranke für den Erwartungswert von $H^\xi(U_1, \ldots, U_n)$ an. (1)

Aufgabe 4

Finde für die Beispiele (a), (b) und (d) von Aufgabe 1 auf Blatt 1 einen möglichst kleinen Stabilisationsradius, wobei die Punktmenge $\mathcal{X} \subset [0,1]^d$ durch einen Poisson-Prozess im $\mathbb{R}^d$ zu ersetzen ist. Dabei ist bei (d) der Fall $d = 2$ ausreichend.

a: (2)
b: (3)
d: (3)

Hinweis: Dabei kannst Du die Interaktionsfunktion ξ aus der Musterlösung oder auch Deine eigene verwenden.

Hinweis zu (d): Teile hierfür den $\mathbb{R}^2$ in 6 Teile („Tortenstücke“) mit Mittelpunkt x ein und betrachte pro „Stück“ den zu x nächstgelegenen Punkt.