Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

WS 2011
29. 11. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze in stoch. Geometrie

- Blatt 3 -

Abgabe am 6. 12. vor der Übung

Aufgabe 1 (coupling)
Es seien f und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Wahrscheinlichkeitsdichten mit

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| f(x) - g(x) \Big| \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Zeige, dass Zufallsvariablen X und Y mit Dichte f bzw. g existieren, so dass $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 2\varepsilon$. (4)
Hinweis: Betrachte $m(x) = (f \wedge g)(x)$, und $f - m$ bzw. $g - m$. Wende die Inversionsmethode an.

Aufgabe 2
In dieser Aufgabe soll (ein Teil von) Satz 1.3.1 aus der Vorlesung bewiesen werden, der lautet:

> **Satz 1.3.1** Es seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]^d$. Wenn H_B^ξ ein glattes, superadditives, Euklidisches Funktional auf $\mathbb{R}^d$ der Ordnung p ist, $1 \leq p < d$, dann gilt
>
> $$n^{-(d-p)/d}\, H_B^\xi(\{U_1, \ldots, U_n\}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \alpha(H_B^\xi, d) \in (0, \infty).$$

Dazu teilen wir den Beweis in mehrere Schritte ein, wobei wir die Bezeichnung $\varphi(n) = \mathbb{E}\, H_B^\xi(\{U_1, \ldots, U_n\})$ verwenden:

(a) Zeige, dass $\overline{\alpha} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{(d-p)/d}} < \infty$. (2)

(b) Teile $[0,1]^d$ in m^d (gleichgroße) Würfel ein und betrachte die U_i, die in einen Würfel fallen, jeweils getrennt. Nutze die Eigenschaften von H_B^ξ, um zu zeigen, dass falls $n\, m^{-d} \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n) \geq m^{d-p}\, \varphi(n\, m^{-d}) - c_2\, m^{(d-p)/2}\, n^{(d-p)/2d},$$

wobei c_2 die Konstante aus der Definition der Glattheit ist. (5)
Hinweis: Zeige: für $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und $0 < s < 1$ gilt $\mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}\,X|^s \leq (\mathrm{Var}\,X)^{s/2} \leq (\mathbb{E}\,X)^{s/2}$. (2)

(c) Folgere daraus, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$ (1)

$$\frac{\varphi(n\, m^d)}{(n\, m^d)^{(d-p)/d}} \geq \frac{\varphi(n)}{n^{(d-p)/d}} - \frac{c_2}{n^{(d-p)/2d}}.$$

(d) Zeige mit (c), dass bei geeigneter Wahl von $n_0 = n(\varepsilon)$ für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, dass (2)

$$\frac{\varphi(n_0\, m^d)}{(n_0\, m^d)^{(d-p)/d}} \geq \overline{\alpha} - 2\varepsilon.$$

(e) Zeige die Ungleichung aus Teil (d) für $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig, und folgere daraus, dass $\liminf_{k\to\infty} \varphi(k)/k^{(d-p)/d} \geq \overline{\alpha} - 2\varepsilon$. Nutze dabei n_0 aus (d) und die Glattheit von H_B^ξ. (4)

(f) Beweise mit (e) „unseren“ Satz 1.3.1, wobei $\alpha(H_B^\xi, d) > 0$ nicht gezeigt werden muss. (2)