Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

WS 2011
14. 12. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze in stochastischer Geometrie

- Blatt 4 -

Abgabe am 20. 12. vor der Übung

Aufgabe 1

Betrachte die Variante des nächster-Nachbar-Funktionals NN^*, bei der Kanten, die für beide Punkte der nächste Nachbar sind, doppelt gezählt werden, also

$$NN^*(\mathcal{X}) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \xi(\mathcal{X},x) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \min_{y\in\mathcal{X}\setminus\{x\}} \|x-y\|.$$

(a) Betrachte $K=[0,1]^d$ und $\kappa(\cdot)=\mathbb{1}_K(\cdot)$. Ist die Stabilisierung für κ exponentiell schnell? (4)

(b) Es sei nun $K=\mathbb{R}^d$ und $\kappa(x)=1/2\exp\{-\sum_{i=1}^d |x_i|\}$, wobei $x=(x_1,\dots,x_d)^T$. Finde eine Abschätzung für $\tau(x)$ und untersuche damit κ auf exponentiell schnelle Stabilisierung. (4)

(c) Betrachte nun die Interaktionsfunktion $\xi(\mathcal{X},x)=\mathrm{Card}(B_1(x)\cap(\mathcal{X}\setminus\{x\}))$. Ist dieses ξ exponentiell stabilisierend bzgl. κ und K aus Teil (b)? (2)

Hinweis: Bei einem Poisson-Prozess Π_Λ auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\Lambda:\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}_+$ gilt für $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dass $\mathrm{Card}(\Pi_\Lambda\cap B)\sim\mathrm{Poi}(\Lambda(B))$.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe wollen wir Satz 1.3.2 aus der Vorlesung beweisen:

> **Satz 1.3.2** Es seien H^ξ und H_B^ξ glatte, sub- bzw. superadditive, Euklidische Funktionale auf $\mathbb{R}^d$ der Ordnung p, $1\le p<d$, die nah zueinander im Mittel sind. Dann gilt
>
> $$\left|\mathbb{E}\left[H^\xi(\{U_1,\dots,U_n\})\right]-\alpha(H_B^\xi,d)n^{(d-p)/d}\right|\le c\Big(n^{(d-p)/2d}\vee n^{(d-p-1)/d}\Big)$$
>
> für $U_1,\dots,U_n$ u.i.v. mit $U_i\sim\mathrm{U}([0,1]^d)$ und ein $c>0$.

Hier verwenden wir die Bezeichnung $\varphi(n)=\mathbb{E}\,H^\xi(\{U_1,\dots,U_{N(n)}\})$ und $\varphi_B(n)=\mathbb{E}\,H_B^\xi(\{U_1,\dots,U_{N(n)}\})$, wobei $U_1,U_2,\dots$ u.i.v. sind mit $U_i\sim\mathrm{U}([0,1]^d)$, und $N(n)$ eine Poisson-Verteilte Zufallsvariable mit Parameter n.

(a) Zeige, dass es ein $C>0$ gibt, so dass für $n\in\mathbb{N}$ und 2er-Potenzen $m=2^k$, $k\in\mathbb{N}$ (3)

$$\frac{\varphi(n\,m^d)}{(n\,m^d)^{(d-p)/d}}\le\frac{\varphi(n)}{n^{(d-p)/d}}+\frac{C}{n^{(d-p)/d}}.$$

(b) Folgere hieraus und aus Aufgabe 2 von Blatt 3, dass (3)

$$\varphi(n)-\alpha(H_B^\xi,d)n^{(d-p)/d}\ge -C \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi_B(n)-\alpha(H_B^\xi,d)n^{(d-p)/d}\le 0.$$

(c) Zeige unter Verwendung der Nähe im Mittel von H^ξ und H_B^ξ, dass (3)

$$|\,\mathbb{E}\,H^\xi(U_1,\dots,U_{N(n)})-\alpha(H_B^\xi,d)\,n^{(d-p)/d}|\le C'\left(n^{(d-p-1)/d}\vee 1\right).$$

Hinweis: Betrachte für $|\varphi_B(n)-\varphi(n)|$ den bedingten Erwartungswert bzgl. $N(n)$.

(d) Führe den Beweis mit Hilfe der Glattheit zu Ende. (2)