Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

WS 2011
10. 1. 2012

Übungen zu Grenzwertsätze in stochastischer Geometrie

- Blatt 5 -

Abgabe am 17. 1. vor der Übung

Aufgabe 1
Zeige folgende Eigenschaften der n-ten Kumulanten ($n \in \mathbb{N}$) für unabhängige Zufallsvariablen X und Y und $a \in \mathbb{R}$:

(a) $c_1(X+a) = c_1(X) + a$ und $c_n(X+a) = c_n(X)$ für $n \geq 2$ (Verschiebungsinvarianz), (3)

(b) $c_n(a\,X) = a^n\, c_n(X)$ (Homogenität), (2)

(c) $c_n(X+Y) = c_n(X) + c_n(Y)$ (Additivität). (2)

(d) Es gilt die alternative Darstellungsformel (5)

$$c_n(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sum_{n_1+\dots+n_j=n} \frac{n!}{n_1!\dots n_j!}\, \mathbb{E}\, X^{n_1} \dots \mathbb{E}\, X^{n_j}.$$

Hinweis: Hier kannst Du davon ausgehen, dass alle Momente von X existieren. Dann kann man mit der Reihendarstellung des komplexen Logarithmus $\log(1+z) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{1}{s}z^s$, $|z| < 1$ und Koeffizientenvergleich mit der Taylorreihe des Logarithmus der charakteristischen Funktion die obige Formel zeigen.

Aufgabe 2
Berechne die Kumulanten bei einer normalverteilten Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. (4)

Aufgabe 3
Beweise Lemma 1.4.2 aus der Vorlesung, wobei κ und Π_κ wie üblich bezeichnet seien. (5)

Lemma 1.4.2
Seien $x_0, x_1 \in K$ Lebesguepunkte von κ, $x_0 \neq x_1$. Falls ξ homogen stabilisierend ist, dann gilt

$$\Big(\xi_\lambda(x_0, \Pi_{\lambda\,\kappa}), \xi_\lambda(x_1, \Pi_{\lambda\,\kappa})\Big) \quad \xrightarrow[\lambda\to\infty]{\mathrm{d}} \quad \Big(\xi(\mathbf{o}, \Pi_{\kappa(x_0)}), \xi(\mathbf{o}, \tilde{\Pi}_{\kappa(x_1)})\Big),$$

wobei $\tilde{\Pi}_{\kappa(x_1)}$ unabhängig von $\Pi_{\kappa(x_0)}$ ist.

Zur Vereinfachung kannst Du davon ausgehen, dass $\xi(x, \mathcal{X})$ nur von den k nächsten Nachbarn von x in $\mathcal{X}$ abhängt.