Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

WS 2011
24. 1. 2012

Übungen zu Grenzwertsätze in stochastischer Geometrie

- Blatt 6 -

Abgabe am 31. 1. vor der Übung

Aufgabe 1

Untersuche, ob die Funktionale von Blatt 4, Aufgabe 1, exponentiell binär stabilisierend sind. (3+2+2)

Aufgabe 2 (Simulation von Poisson-Linien-Prozessen im $\mathbb{R}^2$)

Betrachte einen Poisson-Punkt-Prozess Π_λ auf $W := \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ mit Intensitätsmaß $\Lambda(\cdot) = \lambda\, \nu_2(\cdot)$. Es sei ferner die Funktion $g : W \to \mathbf{L}(2, 1)$ gegeben, die einen Punkt (r, ω) aus W auf die Gerade mit Abstand r zum Ursprung und Winkel ω zur y-Achse abbildet – der dem Ursprung nächste Punkt („Aufpunkt“) der Gerade $g(r, \omega)$ hat also die Polarkoordinaten (r, ω).

Damit definieren wir den Poisson-Linien-Prozess

$$\Pi_\lambda^{\mathrm{PLP}} := \{g(r, \omega) : (r, \omega) \in \Pi_\lambda\}.$$

(a) Zeige, dass die Verteilung der Anzahl der Schnitte von $\Pi_\lambda^{\mathrm{PLP}}$ mit einer Kreisscheibe $B_s(x)$ nur von ihrem Radius s, also nicht von $x \in \mathbb{R}^2$, abhängt. (4)

Hinweis: Berechne hierfür das Maß der Menge aller $(r, \omega) \in W$, für die $g(r, \omega)$ die Scheibe schneidet.

Anmerkung: Man kann mit einer ähnlichen Rechnung zeigen, dass der Geraden-Prozess $\Pi_\lambda^{\mathrm{PLP}}$ stationär ist.

(b) Die Intensität eines stationären Geraden-Prozesses ist die erwartete Gesamtlänge der Geraden innerhalb eines Fensters mit Einheitsfläche. Welche Intensität hat $\Pi_\lambda^{\mathrm{PLP}}$? (4)

(c) Bekanntermaßen kann man mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots,$ wobei $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda')$, einen Poisson-Punkt-Prozess im $\mathbb{R}^1$ mit Intensität λ' simulieren, der aus den Punkten $Y_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ besteht.

Bilde mit diesem Prinzip einen Simulationsalgorithmus für einen Poisson-Linien-Prozess mit Intensität μ. (3)

Hinweis: Versehe für die Simulation von $\Pi_\lambda^{\mathrm{PLP}}$ einen Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^1$ mit „Marken“ aus dem Raum $[0, 2\pi]$.

(d) Implementiere den Algorithmus in einer Programmiersprache Deiner Wahl und plotte das Ergebnis. (4*)