Prof. Dr. Evgeny Spodarev — WS 2011

Malte Spiess — 7. 2. 2012

Übungen zu Grenzwertsätze in stochastischer Geometrie

- Blatt 7 -

Abgabe am 14. 2. vor der Übung (ohne Wertung)

Aufgabe 1

Es sei S^{d-1} die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^d$. Betrachte den markierten Punktprozess $\Pi := ((P_i, \omega_i))_{i\geq 1}$, wobei $(P_i)_{i\geq 1}$ ein stationärer Poissonscher Punktprozess auf $\mathbb{R}_+$ ist mit Intensität $\lambda > 0$, und die ω_i eine davon unabhängige Folge von u.i.v. Zufallselementen mit Bildraum S^{d-1}. Dabei bezeichnen wir die Verteilung von ω_1 mit α. Betrachte nun die Abbildung $h : \mathbb{R}_+ \times S^{d-1} \to \mathbb{A}(d, d-1), (p, \omega) \mapsto \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, \omega\rangle = p\}$, wobei $\mathbb{A}(d, d-1)$ den Raum der affinen Hyperebenen bezeichnet. Dann bezeichnen wir mit $\Pi^{\text{PHP}} = (h(P_i, \omega_i))_{i\geq 1}$ den von Π induzierten Hyperebenenprozess.

(a) Zeige, dass Π^{PHP} stationär ist und berechne seine Intensität, also die erwartete Gesamtfläche von Π^{PHP} pro Einheitsvolumen.

Hinweis: Zeige dafür, dass $\mathbb{P}(\Pi^{\text{PHP}} \cap C \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\Pi^{\text{PHP}} \cap (C + x) \neq \emptyset)$ für kompakte C und $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist Π^{PHP} isotrop, falls α die Gleichverteilung auf S^{d-1} ist?

Aufgabe 2

Betrachte den homogenen Poisson-Prozess Π im $\mathbb{R}^2$ mit Intensität $\lambda > 0$. Aus dem Satz von Slivnyak folgt, dass man durch Hinzunahme des Ursprungs, $\Pi^o := \Pi \cup \{\mathbf{o}\}$, den Ursprung in Π^o als typischen Punkt eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ betrachten kann. Das soll hier zur Simulation der typischen Zelle genutzt werden, wobei Π durch radiale Simulation erzeugt wird, so lange, bis neu hinzukommende Punkte die typische Zelle nicht mehr verändern. Dabei sei mit C_n die „Zelle“ (ggf. eine unbeschränkte Menge) nach der Simulation des n-ten Punktes x_n (mit Polarkoordinaten (p_n, ω_n)) bezeichnet. Für C_n führen wir folgende Notation ein:

Es seien $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_j$ die Punkte aus $\{x_1, \ldots, x_n\}$, die in C_n mit $\mathbf{o}$ benachbart sind, also eine Rolle für die Form von C_n spielen, sortiert nach den Winkeln $\tilde{\omega}_i$. Ferner sei $\tilde{g}_i$ die Gerade, die in der Mitte zwischen $\tilde{x}_i$ und $\mathbf{o}$ liegt, also $h(\tilde{p}_i/2, \tilde{\omega}_i)$, und $\tilde{s}_i$ der Schnittpunkt von $\tilde{g}_i$ mit $\tilde{g}_{i+1}$ (bzw. $\tilde{g}_1$, falls $i = j$), falls $\tilde{s}_i$ in C_n liegt, und $\tilde{s}_i = \infty$, sonst.

(a) Wie muss die typische Zelle aktualisiert werden, wenn ein neuer Punkt hinzugenommen wird? Gib einen Algorithmus an.

(b) Wann kann man die Simulation abbrechen, weil sich die typische Zelle nicht mehr verändert?