Symmetrische α-stabile Zufallsvariablen und Reihenrepräsentation α-stabiler Zufallsvariablen

Seminar Stochastische Geometrie

WS 2011/12

Steffen Tittel

Gliederung

1. Symmetrische α-stabile Zufallsvariablen
   1. Wiederholung
   2. Eigenschaften symmetrischer α-stabiler ZV
2. Reihenrepräsentation α-stabiler Zufallsvariablen
   1. Exkurs Poisson-Prozesse
   2. Voraussetzungen
   3. Reihenrepräsentation
3. Quellenverzeichnis

α - stabile Zufallsvariablen abhg. von 4 Parametern

Schreibweise:

$$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

charakteristische Funktion:

$$\mathrm{E}\exp(\mathrm{i}\theta X) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - \mathrm{i}\beta(sign\,\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \mathrm{i}\mu\theta\right\}, & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\sigma|\theta|\left(1 + \mathrm{i}\beta\frac{2}{\pi}(sign\,\theta)\ln|\theta|\right) + \mathrm{i}\mu\theta\right\} & \text{, falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

ZV X ist symmetrisch α-stabil $\Leftrightarrow X \sim S_\alpha(\sigma,0,0)$

Schreibweise:

$$X \sim S\alpha S$$

charakteristische Funktion:

$$E\exp(i\theta X) = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha)$$

Beispiele:

- Gauß-Verteilung mit Erwartungswert $\mu = 0$
- Cauchy-Verteilung mit Erwartungswert $\mu = 0$

Spezialfälle :

- Standard SαS $(\sigma = 1) \Rightarrow \mathrm{S}_\alpha(1,0,0)$
- Standard SαS mit $\alpha = 2 \Rightarrow \mathrm{X} \sim \mathrm{N}(0,2)$

Transformation

$X \sim S_{\alpha'}(\sigma,0,0)$, außerdem $0 < \alpha < \alpha' \leq 2$

und $A \sim S_{\alpha/\alpha'}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2\alpha'}\right)^{\alpha'/\alpha},1,0\right)$ unabhängig von X

dann gilt $Z = A^{1/\alpha'} X \sim S_\alpha(\sigma,0,0)$

Beweis

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\theta\, Z\right\}\\
&= \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\theta\, A^{1/\alpha'} X\right\} = \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\Big(\exp\left\{\mathrm{i}\left(\theta\, A^{1/\alpha'}\right) X\right\} \Big| A\Big)\Big)\\
&= \mathrm{E}\exp\left\{-\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'} A\right\} = \exp\left\{-\left(\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'}\right)^{\alpha/\alpha'}\right\}\\
&= \exp\left\{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\right\}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt :

- Jede SαS ZV ist bedingt Gauss - verteilt

Gliederung

1. Symmetrische α-stabile Zufallsvariablen
    1. Wiederholung
    2. Eigenschaften symmetrischer α-stabiler ZV
2. Reihenrepräsentation α-stabiler Zufallsvariablen
    1. Exkurs Poisson-Prozesse
    2. Voraussetzungen
    3. Reihenrepräsentation
3. Quellenverzeichnis

Prozess $\mathrm{P}_{\lambda,\mathrm{t}}$ heißt Poisson-Prozess mit Intensität λ, wenn gilt

- $P_{\lambda,0} = 0$
- $P_{\lambda,t} - P_{\lambda,s} \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda(\mathrm{t}-\mathrm{s})\right)$
- $\left\langle P_{\lambda,t_{i+1}} - P_{\lambda,t_i} \,\middle|\, 1 \le i \le n, n \in \mathrm{N} \right\rangle$ stochastisch unabhängig, wobei $\{t_i\}$ eine Folge von Zeitpunkten ist

Intensität λ entspricht Anzahl erwarteter Sprünge je Zeiteinheit

Poisson-Prozesse $\mathrm{P}_{\lambda_1,t}$ und $\mathrm{Q}_{\lambda_2,t}$ unabhängig

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ ist Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_1 + \lambda_2$

$\{\tau_i\}$ Zeiten von Ankünften eines Poisson - Prozesses mit Intensität 1
$\{\mathrm{R}_\mathrm{i}\}$ u.i.v. Zufallsvariablen, unabhängig von $\{\tau_\mathrm{i}\}$

$\exists\, X$ ZV, so dass $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^{-1/\alpha} R_i \xrightarrow{f.s.} X$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert gegen eine streng α - stabile ZV X

Beweis

für f.s. Konvergenz der Reihe werden Annahmen benötigt :

- $0 < \alpha < 2$
- R_{i} haben endliche absolute α - te Momente
- setze $\mathrm{R}_{\mathrm{i}} = \varepsilon_i \mathrm{W}_{\mathrm{i}}$
- wir nutzen Γ_{i} statt τ_{i}

$$C_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, \text{ falls } \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , \text{ falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

mit diesen Voraussetzungen gilt :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-1/\alpha} W_i \xrightarrow{f.s.} X \sim S_\alpha((C_\alpha^{-1} \mathrm{E}|W_1|^\alpha)^{1/\alpha}, 0, 0)$$

Reihenrepräsentation von SαS ZV

jede ZV $X \sim S_\alpha(\sigma,0,0)$ hat die Reihenrepräsentation

$$\sigma\left(\frac{C_\alpha}{\mathrm{E}|W_1|^\alpha}\right)^{1/\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\Gamma_i^{-1/\alpha}W_i$$

Anmerkungen :

- Verteilung des 2. Teils hängt nur von $\mathrm{E}|\mathrm{W}_1|^\alpha$ ab
- kann SαS generieren , konvergiert aber langsam

mit $E|W_i|^\alpha = \sigma^\alpha$ gilt dann :

$$X \overset{d}{=} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-1/\alpha} W_i$$

• 1. Element der Reihe hat gleiches asymptotisches Verhalten wie X, d.h.

$$P(X > \lambda) = P\left(C_\alpha^{1/\alpha} \varepsilon_1 \Gamma_1^{-1/\alpha} W_1 > \lambda\right) \approx \frac{1}{2} C_\alpha \sigma^\alpha \lambda^{-\alpha}$$

• für die restlichen Elemente gilt

$$P\left(\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-1/\alpha} W_i > \lambda\right) = o\left(\lambda^{-\alpha}\right)$$

Reihenrepräsentation schiefer α-stabiler ZV

gleiche Voraussetzungen wie bei SαS, zusätzlich

$$E|W_1|^\alpha < \infty \qquad \text{, falls } \alpha \neq 1$$

$$E|W_1 \ln|W_1||^\alpha < \infty \qquad \text{, falls } \alpha = 1$$

$$k_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } 0 < \alpha < 1 \\ E\left(W_1 \int_{|W_1|/i}^{|W_1|/(i-1)} x^{-2} \sin x \, dx \right) & \text{, falls } \alpha = 1 \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(i^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (i-1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) E|W_1| & \text{, falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

allgemeine Reihenrepräsentation

$$\mu + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\Gamma_i^{-1/\alpha} \mathrm{W}_i - k_i^{(\alpha)} \right) \stackrel{d}{=} X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

mit :

$$\sigma^\alpha = \frac{\mathrm{E}\left|\mathrm{W}_1\right|^\alpha}{C_\alpha} \qquad , \; \beta = \frac{\mathrm{E}\left|\mathrm{W}_1\right|^\alpha sign(\mathrm{W}_1)}{\mathrm{E}\left|\mathrm{W}_1\right|^\alpha} \qquad ,$$

$$\mu = -\mathrm{E}\mathrm{W}_1 \ln\left|\mathrm{W}_1\right|$$

Quellenverzeichnis

- G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu; „Stable non-Gaussian random processes“; Chapman&Hall; 1994; New York