Seminar stabile Zufallsprozesse

Definitionen und Eigenschaften stabiler Verteilungen

Adrian Zimmer

2. November 2011

Inhalt

Definition I

Definition

X hat eine stabile Verteilung, wenn $\forall A, B > 0 : \exists C > 0, D \in \mathbb{R}$ mit

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D \tag{1}$$

wobei X_1, X_2 unabhängige Kopien von X sind

- $P(X = a) \neq 1 \ \forall a \in \mathbb{R}$

Definition I

Definition

X hat eine stabile Verteilung, wenn $\forall A, B > 0 : \exists C > 0, D \in \mathbb{R}$ mit

$$AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D \tag{1}$$

wobei X_1, X_2 unabhängige Kopien von X sind

- $P(X = a) \neq 1 \ \forall a \in \mathbb{R}$
- X streng stabil verteilt wenn D = 0

Definition I

Definition

X hat eine stabile Verteilung, wenn $\forall A, B > 0 : \exists C > 0, D \in \mathbb{R}$ mit

$$AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D \tag{1}$$

wobei X_1, X_2 unabhängige Kopien von X sind

- $P(X = a) \neq 1 \ \forall a \in \mathbb{R}$
- X streng stabil verteilt wenn D = 0
- X symmetrisch stabil verteilt wenn $X \overset{d}{=} -X$

Definition II

Definition

X hat eine stabile Verteilung, wenn für n unabhängige Kopien von X
$\exists C_n > 0, D_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_{>1}$, sodass gilt

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n \tag{2}$$

Definition III

Definition

X hat eine stabile Verteilung, wenn es einen Anziehungsbereich hat, d.h. $\exists$ eine Folge von iid Zufallsvariablen $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und eine positive bzw. reelle Folge d_n bzw, a_n, sodass gilt

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{d} X \tag{3}$$

Definition IV

Definition

X hat eine stabile Verteilung wenn es folgende Parameter gibt:

$$\begin{aligned} 0 <&\alpha \leq 2, \\ &\sigma \geq 0, \\ -1 \leq&\beta \leq 1, \\ &\mu \in \mathbb{R} \; \textit{mit} \end{aligned}$$

$$\psi_X(\theta) = \begin{cases} exp(-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu\theta) & \textit{wenn } \alpha \neq 1 \\ exp(-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign(\theta)\ln(|\theta|)) + i\mu\theta) & \textit{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

wobei ψ_X die charakteristische Funktion von X sei

Definition V

Definition (Gnedenko und Kolmogorov 1960)

F ist die Verteilungsfunktion einer stabilen Verteilung falls gilt $\forall a_1, a_2 > 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} : \exists a > 0, b \in \mathbb{R}$:

$$F(a_1 x + b_1) \star F(a_2 x + b_2) = F(ax + b) \tag{5}$$

Beweis V $\Leftrightarrow$ I

Beweis.

$P(X < ax + b) = P(\frac{X}{a} - \frac{b}{a} < x)$ Also
$F(a_1 x + b_1) \star F(a_2 x + b_2) = F(ax + b)$

$$\Leftrightarrow \frac{X_1}{a_1} + \frac{X_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_1} \overset{d}{=} \frac{X}{a} - \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D$$

□

Beweis III $\Rightarrow$ I

Lemma (Gnedenko und Kolmogorov 1960)

Wir benötigen folgendes Lemma aus obigem Buch, §29 Seite 144f: Sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid, $d_n > 0$, $a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n, \tag{6}$$

Konvergiert (6) in Verteilung zu einer eigentlichen Verteilung, dann folgt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1$

Beweis III $\Rightarrow$ I

Theorem (Gnedenko und Kolmogorov 1960)

Wir benötigen folgenden Satz aus obigem Buch, §10 Seite 144f:

> *Konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen $S_n(x)$ in Verteilung für $n \to \infty$ gegen eine Zufallsvariable X mit einer eigentlichen Verteilung, dann gilt falls die Folge $a_n S_n + b_n$ mit $a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$ in Verteilung konvergiert*

$\exists a > 0,\ b \in \mathbb{R}$:

$$a_n S_n + b_n \xrightarrow{d} aX + b \qquad (7)$$

Beispiel Normalverteilung

Beispiel

$X, X_1, X_2 \cdots \sim N(\mu, \sigma^2)$ *unabhängig, dann gilt*

$$X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2\sigma^2), \qquad \textit{also}$$

Beispiel Normalverteilung

Beispiel

$X, X_1, X_2 \dots \sim N(\mu, \sigma^2)$ *unabhängig, dann gilt*

$$X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2\sigma^2), \qquad \textit{also}$$

$$X_1 + \dots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Beispiel Normalverteilung

Beispiel

$X, X_1, X_2 \dots \sim N(\mu, \sigma^2)$ unabhängig, dann gilt

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 &\sim N(2\mu, 2\sigma^2), \qquad \textit{also} \\
X_1 + \dots + X_n &\sim N(n\mu, n\sigma^2) \\
\Rightarrow X_1 + \dots + X_n &\stackrel{d}{=} \sqrt{n}X + (n - \sqrt{n})\mu
\end{aligned}
$$

Beispiel Normalverteilung

Beispiel

$X, X_1, X_2 \cdots \sim N(\mu, \sigma^2)$ *unabhängig, dann gilt*

$$X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2\sigma^2), \qquad \textit{also}$$

$$X_1 + \cdots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\Rightarrow X_1 + \cdots + X_n \overset{d}{=} \sqrt{n}X + (n - \sqrt{n})\mu$$

$\Rightarrow$ *Normalverteilung ist stabil mit* $C_n = n^{\frac{1}{2}}$, $D_n = (n - n^{\frac{1}{2}})\mu$ *(Deklaration wie in Definition II)*

Beispiel Normalverteilung

Beispiel

$X, X_1, X_2 \dots \sim N(\mu, \sigma^2)$ *unabhängig, dann gilt*

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2+B^2)\sigma^2)$$

Beispiel Normalverteilung

Beispiel

$X, X_1, X_2 \dots \sim N(\mu, \sigma^2)$ *unabhängig, dann gilt*

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2+B^2)\sigma^2)$$

$$\Rightarrow AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} \sqrt{(A^2+B^2)}X + D$$

Beispiel Normalverteilung

Beispiel

$X, X_1, X_2 \cdots \sim N(\mu, \sigma^2)$ unabhängig, dann gilt

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2+B^2)\sigma^2)$$
$$\Rightarrow AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} \sqrt{(A^2+B^2)}X + D$$

$\Rightarrow$ Normalverteilung ist stabil mit $C = (A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}$, $D = (A+B-C)\mu$
(Deklaration wie in Def I)

Inhalt

Eigenschaft 1

Eigenschaft

Sei X stabil verteilt. Für das C_n aus Def II (2) gilt,

$$C_n = n^{1/\alpha} \tag{8}$$

wobei $\alpha \in (0, 2]$ eindeutig durch X bestimmt ist.

Man nennt α Index der Stabilität oder charakteristischer Exponent

Eigenschaft 2

Eigenschaft

Sei X stabil verteilt. Für das C aus Def I (1) gilt,

$$C = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha} \tag{9}$$

wobei α eindeutig durch X bestimmt ist.

Man nennt α Index der Stabilität oder charakteristischer Exponent

Definition

Sei X stabil verteilt. Dann ist die Verteilung von X nach Def IV (4) durch folgende Parameter eindeutig bestimmt

$$\begin{aligned} 0 < &\alpha \leq 2, \\ &\sigma \geq 0, \\ -1 \leq &\beta \leq 1, \\ &\mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Das führt zur folgenden Schreibweise

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu) \tag{10}$$

β ist irrelevant für $\alpha = 2$

Eigenschaft 3

Eigenschaft

Sei X_1, X_2 *unabhängig, mit* $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. *Dann gilt*

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu) \tag{11}$$

mit $\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$

Eigenschaft 3

Beweis.

für $\alpha \neq 1$: $\mathbb{E}(e^{(i\theta(X_1+X_2))}) = \mathbb{E}(e^{(i\theta(X_1))}) * \mathbb{E}(e^{(i\theta(X_2))})$

analog für $\alpha = 1$ $\square$

Eigenschaft 3

Beweis.

für $\alpha \neq 1$: $\mathbb{E}(e^{(i\theta(X_1+X_2))}) = \mathbb{E}(e^{(i\theta(X_1))}) * \mathbb{E}(e^{(i\theta(X_2))})$

$$= exp(-(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha \qquad + i|\theta|^\alpha sign(\theta)(\tan\frac{\pi\alpha}{2})(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha) + i\theta(\mu_1 + \mu_2))$$

analog für $\alpha = 1$ □

Eigenschaft 3

Beweis.

für $\alpha \neq 1$: $\mathbb{E}(e^{(i\theta(X_1+X_2))}) = \mathbb{E}(e^{(i\theta(X_1))}) * \mathbb{E}(e^{(i\theta(X_2))})$

$$
\begin{aligned}
&= exp(-(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha && + i|\theta|^\alpha sign(\theta)(\tan\frac{\pi\alpha}{2})(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha) \\
& && + i\theta(\mu_1 + \mu_2)) \\
&= exp(-(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha(1 && - i\, sign(\theta)(\tan\frac{\pi\alpha}{2})\frac{(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha)}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}) \\
& && + i\theta(\mu_1 + \mu_2))
\end{aligned}
$$

analog für $\alpha = 1$ $\square$

Eigenschaft 4

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), a \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a) \tag{12}$$

Beweis.

$\mathbb{E}(e^{(i\theta(X+a))}) = \mathbb{E}(e^{(i\theta(X))}) * \mathbb{E}(e^{(i\theta(a))}) \overset{(4)}{\Rightarrow}$ *Beh* □

Eigenschaft 4

Eigenschaft

$X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$

Deshalb nennt man μ Lageparameter.

Eigenschaft 5

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. *Dann gilt für* $a \neq 0$

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu) & \text{wenn } \alpha \neq 1 \\ S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}\sigma\beta a \ln|a|) & \text{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \tag{13}$$

Eigenschaft 5

Eigenschaft

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu) & wenn\ \alpha \neq 1 \\ S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}\sigma\beta a \ln|a|) & wenn\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Deshalb nennt man σ Skalierungsparameter.

Eigenschaft 6

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$. Dann gilt

$$-X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0) \tag{14}$$

Beweis.

Folgt aus Eigenschaft 5 (13) $\square$

Eigenschaft 7

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. *Dann gilt*

$$X \text{ symmetrisch } \Leftrightarrow \beta = 0, \mu = 0 \tag{15}$$

Eigenschaft 7

Eigenschaft

X symmetrisch $\Leftrightarrow \beta = 0, \mu = 0$

Deshalb nennt man β Schiefeparameter.

Für $\beta > 0$ bzw < 0 nennt man X rechts- bzw linksschief
Für $\beta = 1$ bzw -1 nennt man X vollständig rechtsschief bzw. linksschief

Eigenschaft 8 und 9

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. *Dann gilt für* $\alpha \neq 1$

$$\mu = 0 \Leftrightarrow X \text{ ist streng stabil verteilt} \tag{16}$$

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. *Dann gilt für* $\alpha \neq 1$

$$X - \mu \text{ ist streng stabil verteilt} \tag{17}$$

Eigenschaft 10

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. *Dann gilt für* $\alpha = 1$

$$\beta = 0 \Leftrightarrow X \textit{ ist streng stabil verteilt} \tag{18}$$

Korollar

Korollar

Sei $X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$ $(\alpha = 1!)$, $a \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

1. *für* X *nicht streng stabil verteilt* $\Rightarrow X - a$ *nicht streng stabil verteilt*
2. *für* X *streng stabil verteilt* $\Rightarrow X - \mu$ *symmetrisch*

Korollar

Korollar

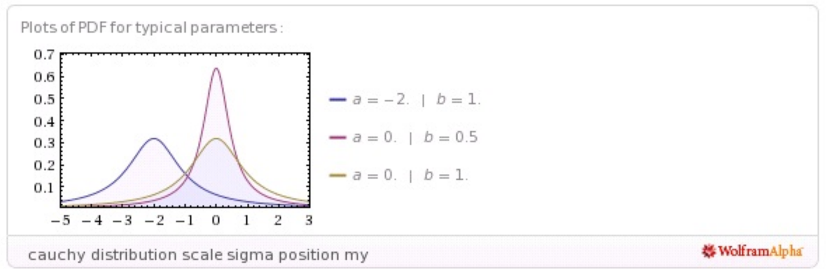
Sei $X, X_1 \dots X_n$ *iid* $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. *Dann gilt*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X + \mu(n - n^{\frac{1}{\alpha}}), \quad \alpha \neq 1$$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} nX + \frac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln(n), \quad \alpha = 1$$

Bekannte Dichten

- Cauchy Verteilung $S_1(b, 0, a)$: $f(x) = \frac{b}{\pi((x-a)^2+b^2)}$



Bekannte Dichten

- Cauchy Verteilung $S_1(b, 0, a): \; f(x) = \frac{b}{\pi((x-a)^2+b^2)}$
- Levy Verteilung $S_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \mu): \; f(x) = (\frac{\sigma}{2\pi})^{\frac{1}{2}}(x-\mu)^{\frac{-3}{2}} e^{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}}$

Eigenschaft 11

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$. *Dann gilt für* $\alpha \neq 2$
$\exists Y_1, Y_2 \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ *:*

$$\begin{aligned} X &\stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_2 && \alpha \neq 1 \\ X &\stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right) Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right) Y_2 + R && \alpha = 1 \end{aligned} \tag{19}$$

mit $R = \sigma\left(\frac{1+\beta}{\pi} \ln \frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{\pi} \ln \frac{1-\beta}{2}\right)$

Eigenschaft 12

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \alpha \neq 2$. *Dann gilt*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha P(X > \lambda) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha \tag{20}$$

wobei $C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x dx\right)^{-1}$

Eigenschaft 13

Eigenschaft

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \alpha \neq 2$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &< \infty \quad \text{wenn} \quad 0 < p < \alpha \\ \mathbb{E}|X|^p &= \infty \quad \text{wenn} \quad p \geq \alpha \end{aligned} \tag{21}$$

Konstruktion

Theorem

Sei $\alpha \in (0,1), \delta > 0, N_\delta \sim Poi(\delta^{-\alpha})$, $Y_{\delta,k}, k \in \mathbb{N}$ *iid, positiv, unabhängig von* N_δ *mit*

$$\begin{aligned} P(Y_{\delta,k} > \lambda) &= \delta^\alpha \lambda^{-\alpha} && \text{wenn } \lambda > \delta \\ P(Y_{\delta,k} > \lambda) &= 1 && \text{wenn } \lambda \leq \delta \end{aligned}$$

Dann gilt $X_\delta = \sum_{k=1}^{N_\delta} Y_{\delta,k} \xrightarrow[\delta \to 0]{d} X \sim S_\alpha(\sigma'(\alpha), 1, 0)$
mit $\sigma'(\alpha) = (\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}$

Korollar (Konstruktion)

Mit Eigenschaft 11 (19) *kann man dann für* $\alpha < 1$ *aus unabhängigen* $Y_1, Y_2 \sim S_\alpha(\sigma'(\alpha), 1, 0)$, $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *konstruieren:*

$$X \overset{d}{=} \frac{\sigma}{\sigma'(\alpha)}\left(\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_2\right) + \mu \tag{22}$$

Stetigkeit

$$\psi_X(\theta) = \begin{cases} exp(-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu\theta) & wenn\ \alpha \neq 1 \\ exp(-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign(\theta)\ln(|\theta|)) + i\mu\theta) & wenn\ \alpha = 1 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$

Stetigkeit

$$\psi_X(\theta) = \begin{cases} exp(-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu\theta) & wenn\ \alpha \neq 1 \\ exp(-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign(\theta)\ln(|\theta|)) + i\mu\theta) & wenn\ \alpha = 1 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$

$$\psi_X(\theta) = exp(\sigma^\alpha(-|\theta|^\alpha + i\theta\omega_1(\theta, \alpha, \beta)) + i\mu_1\theta)$$

Stetigkeit

$$\psi_X(\theta) = \begin{cases} exp(-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign(\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu\theta) & wenn\ \alpha \neq 1 \\ exp(-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign(\theta)\ln(|\theta|)) + i\mu\theta) & wenn\ \alpha = 1 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$

$$\psi_X(\theta) = exp(\sigma^\alpha(-|\theta|^\alpha + i\theta\omega_1(\theta, \alpha, \beta)) + i\mu_1\theta)$$

$$\omega_1(\theta, \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta(|\theta|^{\alpha-1} - 1)\tan\frac{\pi\alpha}{2} & wenn\ \alpha \neq 1 \\ \beta\frac{2}{\pi} ln|\theta| & wenn\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu + \beta\sigma^\alpha tan\frac{\pi\alpha}{2} & wenn\ \alpha \neq 1 \\ \mu & wenn\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Theorem (Laplace Transformation)

Für $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0), 0 < \alpha \leq 2, \gamma \geq 0, \sigma > 0$ *gilt*

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma X}) = exp(-\frac{\sigma^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\gamma^\alpha) \qquad \textit{wenn } \alpha \neq 1 \qquad (23)$$

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma X}) = exp(\sigma\frac{2}{\pi}\gamma\ln(\gamma)) \qquad \textit{wenn } \alpha = 1 \qquad (24)$$

Beweis

Beweis.

Für $\alpha < 1$

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma X_\delta}) = exp(\delta^{-\alpha} \int_\delta^\infty \delta^\alpha \alpha \lambda^{-(\alpha+1)}(e^{-\gamma\lambda} - 1)d\lambda)$$

Beweis

Beweis.

Für $\alpha < 1$

$$\mathbb{E}(e^{-\gamma X_\delta}) = exp(\delta^{-\alpha} \int_\delta^\infty \delta^\alpha \alpha \lambda^{-(\alpha+1)}(e^{-\gamma\lambda} - 1)d\lambda)$$
$$\xrightarrow{\delta \to 0} exp(\int_0^\infty \alpha\lambda^{-(\alpha+1)}(e^{-\gamma\lambda} - 1)d\lambda)$$

□

Beweis

Beweis.

Für $\alpha < 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-\gamma X_\delta}) =& exp(\delta^{-\alpha} \int_\delta^\infty \delta^\alpha \alpha \lambda^{-(\alpha+1)}(e^{-\gamma\lambda} - 1)d\lambda) \\
\xrightarrow{\delta\to 0}& exp(\int_0^\infty \alpha\lambda^{-(\alpha+1)}(e^{-\gamma\lambda} - 1)d\lambda) \\
=& exp(-\gamma^\alpha \int_0^\infty x^{-\alpha}(e^{-x})dx) \\
=& exp(-\gamma^\alpha \Gamma(1-\alpha))
\end{aligned}$$

$\square$

Quellenverzeichnis

- G. Samorodnitsky M.S.Taqqu
  Stable non-Gaussian random processes
  Chapman and Hall, Boca Raton 1994
- B.W.Gnedenko und A.N.Kolmogorov
  Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrössen
  Akademie-Verlag, Berlin 1960
- W.Feller
  An Introduction to Probability Theory and Its Applications
  John Wiley and Sons, Princeton 1971
- Wolfram Alpha
  www.wolframalpha.com