# Kriging

Andreas Stach
Institut für Stochastik, Universität Ulm
09.01.2012

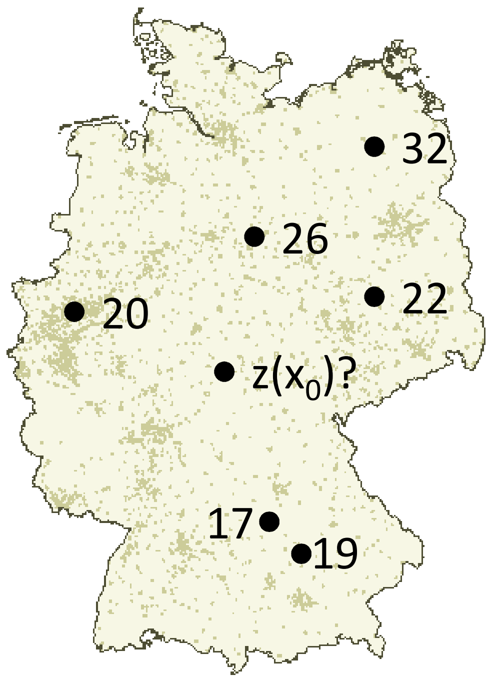
# Gliederung

- Motivation
- Modellannahmen und Variogramm
- Kriging Verfahren

# Motivation

- Sei $D \subset R^p, p \geq 2$ hier $p = 2$
- Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Messstellen mit $x_i \in D$, $i = 1 \ldots n$,
  $z(x_1), \ldots, z(x_n)$ die Messwerte an den Messstellen

=> interpoliere „$z(x_0)$"



# Ziel

Schätzung von $x_0 \in D$ an Stellen an denen nicht gemessen
wurde mit Hilfe der Kriging Gleichung

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha Z(x_\alpha)$$

wobei $Z$ eine Zufallsfunktion ist, $\omega_\alpha$ noch zu bestimmende Gewichte sind

# Modellannahmen

## Definition

- Definiere eine Zufallsfunktion als eine Menge von Zufallsvariablen $\{Z(x): x \in D \subset R^p, p \geq 2\}$
- Die Realisierung einer Zufallsfunktion wird als regionalisierte Variable aufgefasst und als z(x) bezeichnet
- Erwartungswert, Varianz und Covarianz werden wie folgt definiert

Erwartungswertfunktion: $\mathrm{E}(Z(x)) := m(x)$

Varianzfunktion: $\mathrm{Var}(Z(x)) := \mathrm{E}(Z^2(x)) - \mathrm{E}^2(Z(x))$

$$= \mathrm{E}(Z^2(x)) - m^2(x)$$

2-Punkte Kovarianzfunktion: $\mathrm{Cov}(Z(x_\alpha), Z(x_\beta)) := \mathrm{E}(Z(x_\alpha)Z(x_\beta)) - \mathrm{E}(x_\alpha)\mathrm{E}(x_\beta)$

# Modellannahmen

## Bemerkung

- Die Messungen $z(x_i)$ an den Stellen $x_i \in D \subset R^p, p \geq 2, i = 1.....n$ werden als eine diskrete Realisation einer ortsabhängigen Zufallsfunktion $Z(x), x \in D$ aufgefasst
- für $x = x_\alpha \in D$ ist eine Zufallsfunktion $Z(x)$ lokal eine Zufallsvariable $Z(x_\alpha)$
- i.A. sind die Zufallsvariablen, die eine Zufallsfunktion bilden, nicht unabhängig und identisch verteilt (iid)

$\Rightarrow$ klassische Annahme der Statistik, wonach die $z(x_i)$ Realisationen von iid Zufallsvariablen einer Zufallsfunktion sind, ist für die Praxis zu restriktiv
$\Rightarrow$ brauchen ein allgemeineres Modell
$\Rightarrow$ Konzept der Stationarität

# Modellannahmen

Im folgenden sei immer Z(x) eine Zufallsfunktion auf D mit $D \subset R^2$

## Strenge Stationarität / Stationarität 1.Ordnung

Eine Zufallsfunktion $\mathrm{Z}(x), x \in D$ heißt streng stationär, falls alle n-dimensionalen Verteilungen translationsinvariant sind, d.h.

$$\forall n \in N,\ x_1, x_1 + h, \ldots, x_n, x_n + h \in D \text{ gilt } F_{x_1,\ldots,x_n}(z_1,\ldots z_n) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}(x_1) \le z_1, \ldots, \mathrm{Z}(x_n) \le z_n)$$
$$= F_{x_1+h,\ldots,x_n+h}(z_1,\ldots,z_n)$$

Bemerkung : Es lässt sich jedes $x_\beta \in D$ als $x_\alpha + h$ mit $h = x_\beta - x_\alpha$, $\alpha, \beta \in N$ schreiben

Wegen $\mathrm{P}(\mathrm{Z}(x_\alpha) \le z) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}(x_\beta) \le z)$ sind alle Verteilungen identisch

$\Rightarrow$ für Praxis zu restriktiv

# Modellannahmen

## Schwache Stationarität / Stationarität 2.Ordnung

Eine Zufallsfunktion $\mathrm{Z}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \mathrm{D}$ heißt schwach stationär, falls

- $\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2(x)) \leq \infty$
- $\mathrm{E}(\mathrm{Z}(\mathrm{x})) = \mathrm{m} \quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{D}$
- $\mathrm{Cov}(\mathrm{Z}(\mathrm{x}), \mathrm{Z}(\mathrm{x}+\mathrm{h})) = \mathrm{E}(\mathrm{Z}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{Z}(x+h)) - m^2 = C(h) \quad \forall \mathrm{x}, \mathrm{x}+\mathrm{h} \in \mathrm{D}$

Bemerkung : Die Kovarianzfunktion C hängt nur vom Richtungsvektor h ab
und ist symmetrisch, d.h. $C(h) = C(-h)$

# Modellannahmen

## Intrinsische Stationarität / Stationarität 2.Ordnung der Inkremente

Eine Zufallsfunktion $\mathrm{Z}(x), x \in D$ heißt intrinsisch stationär, falls

- $\mathrm{E}(\mathrm{Z}(x+h) - \mathrm{Z}(x)) = m(h) = 0 \quad \forall x, x+h \in D$
- $\mathrm{Var}(\mathrm{Z}(x+h) - \mathrm{Z}(x)) = \mathrm{E}((\mathrm{Z}(x+h) - \mathrm{Z}(x))^2) = 2\gamma(h) \quad \forall x, x+h \in D$

Bemerkung: - Diese Form der Stationarität ist die allgemeinste, weil Sie keine Existenz der Momente der Zufallsfunktion fordert
- Dient uns als Basis zur Definition des theoretischen Variogramms

# Variogramm

Das (Ordinary) Kriging Verfahren benötigt eine Variogrammfunktion

## Definition theoretisches Variogramm

Man habe eine Zufallsfunktion Z(x) mit Eigenschaft der intrinsischen Stationarität

Dann definiert man das theoretische Variogramm

$$\gamma(\mathrm{h}) = \frac{1}{2} Var(Z(x+h) - Z(x)) = \frac{1}{2} \mathrm{E}((Z(x+h) - Z(x))^2)$$

Bemerkung: Das theoretische Variogramm ist ein Maß für den räumlichen Zusammenhang zweier Zufallsvariablen

## Eigenschaften

- $\gamma(h) \geq 0, \gamma(0) = 0$
- $\gamma(-h) = \gamma(h)$
- $\lim \frac{\gamma(h)}{|h|^2} = 0 \text{ für } |\mathrm{h}| \to \infty$

# Variogramm

Bemerkung: Das theoretische Variogramm ist nicht einfach zu bestimmen, auch weil es eine conditionally negative definite Funktion ist (siehe z.B. Wackernagel, Multivariate Geostatistics, pp.53)

Exemplarisches Vorgehen zur Bestimmung eines theoretischen Variogramms

1. Schätzung des Variogramms mit einem experimentellen Variogramm
2. Herleitung des Variogramms mit Hilfe einer Kovarianzfunktion

# Variogramm

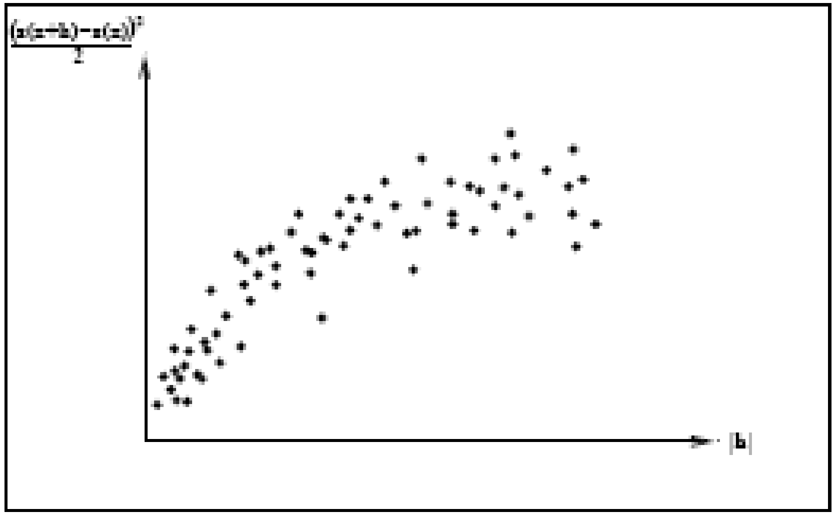
1. Schätzung des Variogramms mit einem experimentellen Variogramm

## Definition Variogrammwolke

Die Variogrammwolke misst die Unterschiedlichkeit von Messwerten

$$\gamma^*(\mathrm{h}) = \frac{1}{2}(z(x_\alpha + h) - z(x_\alpha))^2, \quad \alpha = 1, \ldots., n$$

Wegen $\gamma^*(-h) = \gamma^*(h)$ lässt sich die Variogrammwolke wie folgt darstellen




Variogrammwolke

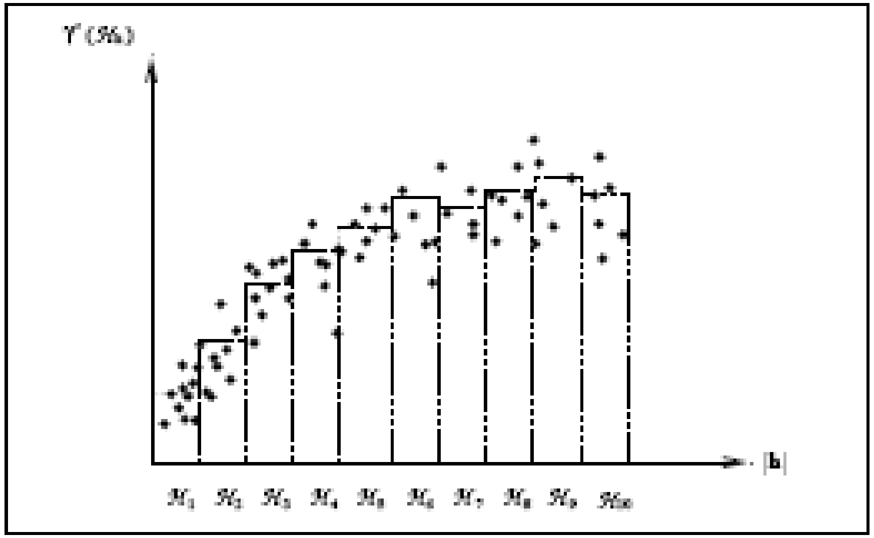
# Variogramm

1. Schätzung des Variogramms mit einem experimentellen Variogramm

## Definition experimentelles Variogramm

$$\gamma^*(\hbar_k) = \frac{1}{2n_c}\sum_{\alpha=1}^{n_c}\left(z(x_\alpha + h) - z(x_\alpha)\right)^2 \text{ mit } h \in \hbar_k$$

– Die Vektorklasse $\hbar_k$ groupiert Vektoren mit einer gewissen Länge und Winkel
– $n_c$ ist die Anzahl der Punktepaare der Vektorklasse $\hbar_k$



# Variogramm

2. Herleitung des Variogramms mit Hilfe einer Kovarianzfunktion

## Zusammenhang Variogramm und Kovarianzfunktion

Die Zufallsfunktion Z erfülle die Voraussetzung der schwachen Stationarität,

dann gilt

$$\gamma(\mathrm{h}) = C(0) - C(h)$$

# Variogramm

2. Herleitung des Variogramms mit Hilfe einer Kovarianzfunktion

## Zusammenhang Variogramm und Kovarianzfunktion

Die Zufallsfunktion Z erfülle die Voraussetzung der schwachen Stationarität,

dann gilt

$$\gamma(\mathrm{h}) = C(0) - C(h)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 2\gamma(\mathrm{h}) &= \mathrm{Var}(Z(\mathrm{x}+\mathrm{h}) - Z(\mathrm{x})) = \mathrm{Var}(Z(\mathrm{x}+\mathrm{h})) + \mathrm{Var}(Z(\mathrm{x})) - 2\mathrm{Cov}(Z(\mathrm{x}+\mathrm{h}), Z(\mathrm{x})) \\ &= \mathrm{Cov}(Z(\mathrm{x}+\mathrm{h}), Z(\mathrm{x}+\mathrm{h})) + \mathrm{Cov}(Z(\mathrm{x}), Z(\mathrm{x})) - 2\mathrm{Cov}(Z(x+h), Z(x)) \\ &= 2(C(0) - C(h)) \end{aligned}$$

Wähle unter Berücksichtung des experimentellen Variogramms eine passende Kovarianzfunktion und damit (theoretisches) Variogramm

# Variogramm

## Beispiele für Kovarianzfunktionen

- Nugget - effekt: $C_{nug}(h) = \begin{cases} b & \text{für } |\mathrm{h}| = 0 \\ 0 & \text{für } |\mathrm{h}| > 0 \end{cases}$

- Exponential: $C_{\exp}(h) = b\exp(-\frac{|h|}{a}) \quad \text{mit } a,b > 0$

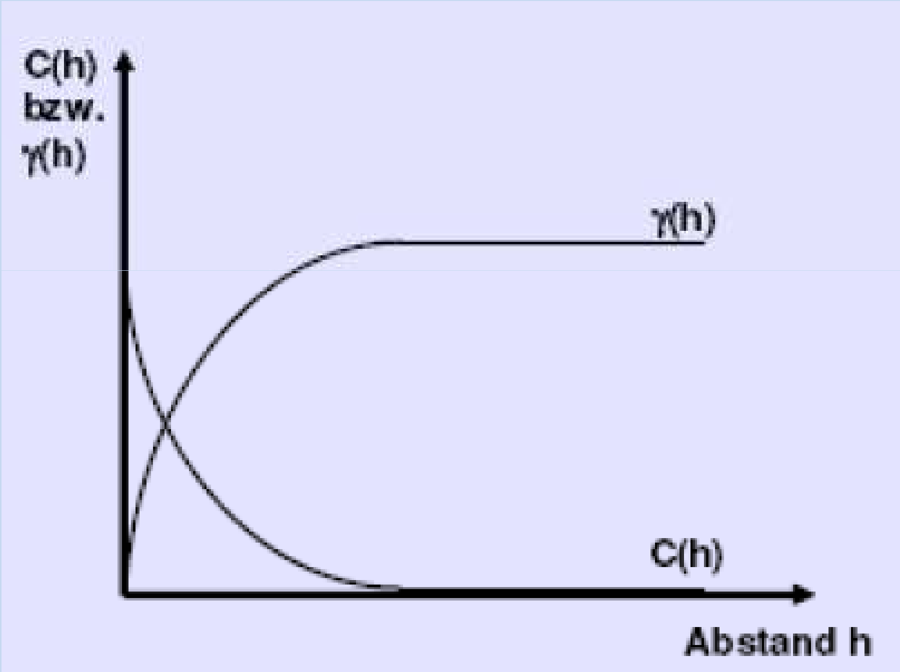
- Sphärisch: $C_{sph}(h) = \begin{cases} \mathrm{b}(1 - \frac{3|\mathrm{h}|}{2a} + \frac{1|\mathrm{h}|^3}{2a^3}) & \text{für } 0 \leq |\mathrm{h}| \leq a \\ 0 & \text{für } |\mathrm{h}| > a \end{cases}$

Als exponentie lles Variogramm erhält man dann $\gamma(\mathrm{h}) = \mathrm{C}(0) - \mathrm{C}(\mathrm{h})$

$$= \mathrm{b} - \mathrm{b} \cdot \exp(-\frac{|\mathrm{h}|}{a}), \quad \text{mit } a,b > 0$$

# Variogramm

Illustration eines exponentiellen Variogramms und Kovarianzfunktion



# Kriging Verfahren

- Es gebe eine intrinsisch stationäre Zufallsfunktion $Z(x), x \in D \subset R^2$ mit

$$E(Z(x+h) - Z(x)) = 0 \quad \forall x, x+h \in D$$

$$Var(Z(x+h) - Z(x)) = E((Z(x+h) - Z(x))^2) = 2\gamma(h) \;\; \forall x, x+h \in D$$

- Das theoretische Variogramm existiert und ist bekannt:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E((Z(x+h) - Z(x))^2)$$

- In einer Umgebung existiere der unbekannte Erwartungswert und ist konstant

$$E(Z(x)) = m, \quad m \in R, x \in W \subset D$$

Dann interpoliere man an der Stelle $x_0$ unter zu Hilfenahme von n-Nachbarpunkten $x_i$, $i = 1, \ldots, n$ mit dem Ordinary Kriging Verfahren

## Ordinary Kriging

$$Z^*_{OK}(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha Z(x_\alpha), \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha = 1$$

# Kriging Verfahren

Bemerkung: Die Bedingung $\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha = 1$ soll für $z(x_i) = c$, $i = 1....n$, $c \in R$ gewährleisten,

dass $z(x_0) = c$, außerdem soll die Unverzerrtheit gelten:

$$E(Z^*(x_0) - Z(x_0)) = E(\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha Z(x_\alpha) - Z(x_0) \cdot \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha}_{1}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha E(Z(x_\alpha) - Z(x_0))$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha E(Z(x_\alpha) - Z(x_\alpha + h)) = 0$$

## Varianz des Schätzfehlers

$$\sigma^2_E = Var(Z^*(x_0) - Z(x_0) = E((Z^*(x_0) - Z(x_0))^2) = ....$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\alpha \omega_\beta \gamma(x_\alpha - x_\beta) + 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha \gamma(x_\alpha - x_0)$$

# Kriging Verfahren

weiteres Vorgehen: Minimiere die Varianz des Schätzfehlers mit der Lagrange-Multiplikator-Methode um das Ordinary Kriging System zu erhalten

$$\sigma^2{}_{\mathrm{E}} = -\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\omega_\alpha\omega_\beta\gamma(x_\alpha - x_\beta) + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha\gamma(x_\alpha - x_0) \rightarrow \text{min}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\text{n}}\omega_\alpha = 1 \quad \text{(Nebenbedingung)}$$

Als Lagrangefunktion L erhält man:

$$L(\omega_1, \ldots, \omega_n, \mu_{OK}) = -\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\omega_\alpha\omega_\beta\gamma(x_\alpha - x_\beta) + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha\gamma(x_\alpha - x_0) - 2\mu_{OK}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha - 1\right)$$

mit Lagrangemultiplikator $\mu_{\mathrm{OK}}$

# Kriging Verfahren

partielles Ableiten von L nach $\omega_1,....,\omega_n,\mu_{OK}$ und gleich 0 setzen liefert das OK - System

$$-2\sum_{\beta=1}^{n}\omega_\beta\gamma(x_\alpha - x_\beta) + 2\gamma(x_\alpha - x_0) - 2\mu_{OK} = 0 \quad \text{für } \alpha = 1,....,n$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \sum_{\beta=1}^{n}\omega_\beta^{OK}\gamma(x_\alpha - x_\beta) + \mu_{OK} = \gamma(x_\alpha - x_0) \quad \text{für } \alpha = 1,....,n \\ \sum_{\beta=1}^{n}\omega_\beta^{Ok} = 1 \end{cases}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & . & . & . & \gamma(x_1 - x_n) & 1 \\ . & & & & . & . \\ . & & & & . & . \\ \gamma(x_n - x_1) & . & . & . & \gamma(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & . & . & . & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^{OK} \\ . \\ . \\ \omega_n^{OK} \\ \mu_{OK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x_1 - x_0) \\ . \\ . \\ \gamma(x_n - x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Kriging Verfahren

Bemerkung : - Die Matrix ist invertierbar, es gibt also eine eindeutige Lösung

- Ordinary Kriging ist ein exakter Interpolator, d.h.

$$Z^*(x_0) = Z(x_\alpha), \quad \text{wenn} \quad x_0 = x_\alpha$$

## Varianz des Schätzfehlers bei Ordinary Kriging

$$\sigma^2{}_{OK} = \mu_{OK} + \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha{}^{OK} \gamma(x_\alpha - x_0)$$

# Kriging Verfahren

Bemerkung : - Die Matrix ist invertierbar, es gibt also eine eindeutige Lösung
- Ordinary Kriging ist ein exakter Interpolator, d.h.

$$Z^*(x_0) = Z(x_\alpha), \quad \text{wenn} \quad x_0 = x_\alpha$$

## Varianz des Schätzfehlers bei Ordinary Kriging

$$\sigma^2_{OK} = \mu_{OK} + \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{OK} \gamma(x_\alpha - x_0)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{OK} &= -\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{OK} \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\beta^{OK} \gamma(x_\alpha - x_\beta) + 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{OK} \gamma(x_\alpha - x_0) \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{OK} \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\beta^{OK} \gamma(x_\alpha - x_\beta) + 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{OK} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \omega_\beta^{OK} \gamma(x_\alpha - x_\beta) + \mu_{OK}\right) \\
&= +\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{OK} \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\beta^{OK} \gamma(x_\alpha - x_\beta) + 2\mu_{OK} = +\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{OK} \left(\gamma(x_\alpha - x_0) - \mu_{OK}\right) + 2\mu_{OK}
\end{aligned}$$

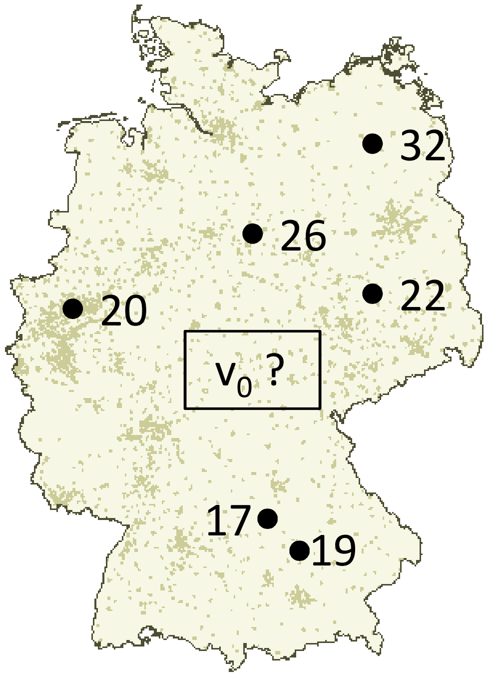
$\Rightarrow$ *Beh.*

# Kriging Verfahren

## Motivation Block-Kriging

- Sei $D \subset R^p, p \geq 2$ hier $p = 2$
- Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Messstellen mit $x_i \in D$, $i = 1 \ldots. n$,
  $z(x_1), \ldots., z(x_n)$ die Messwerte an den Messstellen

=> interpoliere „$z(v_0)$“



# Kriging Verfahren

Verwende Ordinary Kriging Verfahren

## Block Kriging

$$Z^*_{v0} = \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha Z(x_\alpha), \ \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha = 1$$

Block Kriging System:

$$\begin{pmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & . \ . \ . & \gamma(x_1 - x_n) & 1 \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ \gamma(x_n - x_1) & . \ . \ . & \gamma(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & . \ . \ . & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^{BK} \\ . \\ . \\ \omega_n^{BK} \\ \mu_{BK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}(x_1, v_0) \\ . \\ . \\ \bar{\gamma}(x_n, v_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit dem mittleren Variogramm wert

$$\bar{\gamma}(x_i, v_0) = \frac{1}{|v_0|} \int_{v0} \gamma(x_i - x) dx \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

# Kriging Verfahren

## Varianz des Schätzfehlers bei Block Kriging

$$\sigma^2_{BK} = \mu_{BK} - \overline{\gamma}(v_0, v_0) + \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha^{BK} \overline{\gamma}(x_\alpha, v_0)$$

# Kriging Verfahren

- Es gebe eine Zufallsfunktion $Z(x)$ mit Stationarität 2. Ordnung, $x \in D \subset R^2$, d.h.

$$E(Z(x+h)) = E(Z(x)) \quad \forall x, x+h \in D$$

$$Cov(Z(x), Z(x+h)) = E(Z(x) \cdot Z(x+h)) - E(Z(x)) \cdot E(Z(x+h)) = C(h) \quad \forall x, x+h \in D$$

Die Kovarianzfunktion ist also explizit bekannt und kann wie bereits bekannt so dargestellt werden: $Cov(Z(x_\alpha), Z(x_\beta)) = C(x_\beta - x_\alpha) = C(x_\alpha - x_\beta)$

- Auf ganz D existiere der bekannte Erwartungswert und ist konstant

$$E(Z(x)) = m, \quad m \in R, x \in D$$

Dann interpoliere man an der Stelle $x_0$ unter zu Hilfenahme von n-Nachbarpunkten $x_i$, $i = 1, \ldots, n$ mit dem Simple Kriging Verfahren

## Simple Kriging

$$Z^*_{SK}(x_0) = m + \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha (Z(x_\alpha) - m)$$

# Kriging Verfahren

Bemerkung : *E*s soll wie beim Ordinary Kriging die Unverzerrtheit gelten :

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^*(\mathrm{x}_0) - \mathrm{Z}(\mathrm{x}_0)) = m + \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{n}} \omega_\alpha (\mathrm{E}(\mathrm{Z}(x_\alpha) - m) - \mathrm{E}(\mathrm{Z}(x_0))$$

$$= m + \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{n}} \omega_\alpha (m - m) - m = 0$$

## Varianz des Schätzfehlers

$$\sigma^2{}_{\mathrm{E}} = Var(\mathrm{Z}^*(x_0) - \mathrm{Z}(x_0) = \mathrm{E}((\mathrm{Z}^*(x_0) - \mathrm{Z}(x_0))^2) = \mathrm{E}((\mathrm{Z}^*(x_0))^2 + (\mathrm{Z}(x_0))^2 - 2\mathrm{Z}^*(x_0)\mathrm{Z}(x_0))$$

$$= \mathrm{E}((\mathrm{Z}^*(x_0) - m)^2 + (\mathrm{Z}(x_0) - m)^2 - 2(\mathrm{Z}^*(x_0) - m)(\mathrm{Z}(x_0) - m)) = \ldots.$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\alpha \omega_\beta C(x_\alpha - x_\beta) + C(x_0 - x_0) - 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha C(x_\alpha - x_0)$$

# Kriging Verfahren

weiteres Vorgehen: Minimiere die Varianz des Schätzfehlers um das Simple Kriging System zu erhalten

$$\sigma^2{}_{\mathrm{E}} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \omega_\alpha \omega_\beta C(x_\alpha - x_\beta) + C(x_0 - x_0) + 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha C(x_\alpha - x_0) \rightarrow \min$$

partielles Ableiten und gleich 0 setzen liefert das SK - System

$$\frac{\partial \sigma^2{}_{\mathrm{E}}}{\partial \omega_\alpha} = 0 \qquad \text{für } \alpha = 1,....,n$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\sum_{\beta=1}^{n} \omega_\beta C(x_\alpha - x_\beta) - 2C(x_\alpha - x_0) = 0 \quad \text{für } \alpha = 1,....,n$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\beta C(x_\alpha - x_\beta) = C(x_\alpha - x_0) \qquad \text{für } \alpha = 1,....,n$$

# Kriging Verfahren

## Varianz des Schätzfehlers bei Simple Kriging

$$\sigma^2{}_{SK} = \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha{}^{OK} C(x_\alpha - x_0) + C(x_0 - x_0) - 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha C(x_\alpha - x_0)$$

$$= C(0) - \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha C(x_\alpha - x_0)$$

Bemerkung : - Simple Kriging ist ein exakter Interpolator, d.h.

$$Z^*(x_0) = Z(x_\alpha), \quad \text{wenn} \quad x_0 = x_\alpha$$

- Die Varianz des Schätzfehlers $\sigma^2{}_{SK}$ verschwindet an den Messstellen $x_i$, $i = 1, \ldots, n$

# Cross Validation

Cross Validation ist eine einfache Möglichkeit Aussagen über das Model (z.B. Art des Variogramms und seiner Paramter, Anzahl der Nachbarpunkte fürs Kriging) oder über die Daten selbst (Vorhandensein von Ausreißern, punktweisen Anomalien) zu treffen

Vorgehen: Entferne nacheinander jeden Punkt $x_\alpha, \alpha = 1,\ldots,n$ (Notation $x_{[\alpha]}$) und führe eine Kriging Interpolation auf den restlichen Punkten $x_i$, $i = 1,..,\alpha-1, \alpha+1,..,n$ durch

## Differenz zwischen Messwert und Cross Validation Schätzwert

$$\Delta = Z(x_\alpha) - Z^*(x_{[\alpha]})$$

$\Rightarrow$ Indikation wie "gut" der Messwert in die Nachbarschaft der anderen Messwerte passt

# Cross Validation

## Mittlerer Cross Validation Fehler

$$\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(Z(x_{\alpha}) - Z^{*}(x_{[\alpha]})) \cong 0$$

$\Rightarrow$ Indikation ob eine systematische Überschätzung (großer positiver Wert) oder Unterschätzung (großer negativer Wert) vorliegt

## Mittlerer quadrierter standard Cross Validation Fehler

$$\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{(Z(x_{\alpha}) - Z^{*}(x_{[\alpha]}))^{2}}{\sigma^{2}{}_{[\alpha]}} \cong 1$$

$\Rightarrow$ Indikation ob der Schätzfehler im Mittel dem vom Model vorhergesagten Fehler entspricht

# Literatur

- Hans Wackernagael
  Multivariate Geostatistics
  Springer 2003

- Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung
  http://www.pik-potsdam.de/~fred/geostatistik/