Zufällige stabile Prozesse und stabile stochastische Integrale

Stochastikseminar, Dezember 2011

Stabile stochastische Prozesse - Definition

Stabile Integrale

α-stabile Zufallsmaße

Stabile stochastische Prozesse - Definition

Stabile Integrale

α-stabile Zufallsmaße

Definition

$X = \{X(t)\}_{t \in T}$ reellwertiger stochastischer Prozess. X heißt (strikt, symmetrisch) stabil genau dann, wenn $\forall t_1, \dots, t_d \in T$:
$(X(t_1), \dots, X(t_d))$ (strikt, symmetrisch) stabil ist.

Definition

$X = \{X(t)\}_{t \in T}$ reellwertiger stochastischer Prozess. X heißt (strikt, symmetrisch) stabil genau dann, wenn $\forall t_1, \ldots, t_d \in T$: $(X(t_1), \ldots, X(t_d))$ (strikt, symmetrisch) stabil ist.

Theorem

$X = \{X(t)\}_{t \in T}$ stochastischer Prozess. Dann ist X strikt stabil/symmetrisch stabil genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{d} b_k X(t_k)$ strikt stabil/symmetrisch stabil $\forall t_1, \ldots, t_d \in T$, $\forall b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$.

Beispiel: α-stabiler Lévy-Prozess

Beispiel

- $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ *stochastischer Prozess*

Beispiel: α-stabiler Lévy-Prozess

Beispiel

- $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ *stochastischer Prozess*
- X: α*-stabiler Lévy-Prozess genau dann, wenn*

Beispiel: α-stabiler Lévy-Prozess

Beispiel

- $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ *stochastischer Prozess*
- X: α*-stabiler Lévy-Prozess genau dann, wenn*
  - $X(0) = 0$ *f.s.*
  - $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_d) - X(t_{d-1})$ *unabh.* $\forall t_1 \leq \ldots \leq t_d$
  - $\exists \alpha \in (0,2], \beta \in [-1,1], \forall\, 0 \leq s < t : X(t) - X(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$

Beispiel: α-stabiler Lévy-Prozess

Beispiel

- $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ *stochastischer Prozess*
- X*:* α*-stabiler Lévy-Prozess genau dann, wenn*
  - $X(0) = 0$ *f.s.*
  - $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_d) - X(t_{d-1})$ *unabh.* $\forall t_1 \leq \ldots \leq t_d$
  - $\exists \alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\forall\, 0 \leq s < t : X(t) - X(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$

- X α-stabiler Lévy-Prozess $\Rightarrow$ X α-stabiler Prozess

Stabile stochastische Prozesse - Definition

Stabile Integrale

α-stabile Zufallsmaße

Endlich dimensionale Verteilungen

- $(E, \mathcal{E}, m)$ Maßraum
- $\beta : E \to [-1, 1]$ messbar

Endlich dimensionale Verteilungen

- $(E, \mathcal{E}, m)$ Maßraum
- $\beta : E \to [-1, 1]$ messbar
- $$F = \begin{cases} L^\alpha(E, \mathcal{E}, m), \alpha \neq 1 \\ \{f : f \in L^1(E, \mathcal{E}, m), \int |f(x)\beta(x) \log |f(x)||\, m(dx) < \infty\}, \text{sonst} \end{cases}$$

Ziel:

- Stochastischer Prozess $\{I(f)\}_{f \in F}$ mit Eigenschaften

Ziel:

- Stochastischer Prozess $\{I(f)\}_{f \in F}$ mit Eigenschaften
  - Linearität: $I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ f_1, f_2 \in F$
  - $\forall f \in F : I(f)$ stabile ZV

Ziel:

- Stochastischer Prozess $\{I(f)\}_{f \in F}$ mit Eigenschaften
    - Linearität: $I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2)$, $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in F$
    - $\forall f \in F : I(f)$ stabile ZV
- Idee: Spezifikation der endlich-dimensionalen Verteilungen + Satz von Kolmogorov

Endlich dimensionale Verteilungen

Für $\alpha \neq 1$

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1,\ldots,\theta_d) =$$

$$\exp\left(-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right|^\alpha \left(1 - i\beta(x)\mathrm{sign}\left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right)\tan(\pi\alpha/2)\right) m(dx)\right)$$

Endlich dimensionale Verteilungen

Für $\alpha \neq 1$

$$\phi_{f_1,\dots,f_d}(\theta_1,\dots,\theta_d) =$$

$$\exp\left(-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right|^\alpha \left(1 - i\beta(x)\operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right)\tan(\pi\alpha/2)\right) m(dx)\right)$$

Für $\alpha = 1$

$$\phi_{f_1,\dots,f_d}(\theta_1,\dots,\theta_d) =$$

$$\exp\left(-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x)\operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right)\log\left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right|\right) m(dx)\right)$$

1. Schritt

- Zeige: vorherige Ausdrücke sind CF eines α-stabilen ZV

1. Schritt

- Zeige: vorherige Ausdrücke sind CF eines α-stabilen ZV
- Details: Tafel

Erinnerung

Theorem

- *Sei* $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ *ZV*
- X α*-stabil* $\iff$

Erinnerung

Theorem

- *Sei* $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ *ZV*
- X α*-stabil* $\iff$
  - $\exists \Gamma$*: endliches Maß auf* S_d
  - $\exists \mu^0 \in \mathbb{R}^d$ *sodass*

Erinnerung

Theorem

- *Sei* $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ *ZV*
- X α*-stabil* $\iff$
  - $\exists\Gamma$*: endliches Maß auf* S_d
  - $\exists\mu^0 \in \mathbb{R}^d$ *sodass*
  - $\phi_X(\theta) =$

$$exp\left(-\int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha (1 - i sign((\theta, s)) \tan(\pi\alpha/2))\Gamma(ds) + i(\theta, \mu^0)\right)$$

2. Schritt

Theorem (Kolmogorov)

- $\{P_{t_1,t_2,\ldots,t_n}\}_{t_1,\ldots,t_n\in T}$ *W'Maße auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

2. Schritt

Theorem (Kolmogorov)

- $\{P_{t_1,t_2,\ldots,t_n}\}_{t_1,\ldots,t_n \in T}$ *W'Maße auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$
- $\phi_{t_1,\ldots,t_n}$: *charakteristische Funktion von* $P_{t_1,\ldots,t_n}$

2. Schritt

Theorem (Kolmogorov)

- $\{P_{t_1,t_2,\ldots,t_n}\}_{t_1,\ldots,t_n \in T}$ *W'Maße auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$
- $\phi_{t_1,\ldots,t_n}$: *charakteristische Funktion von* $P_{t_1,\ldots,t_n}$
- *Angenommen*
  - *Symmetrie:* $\phi_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}(\theta_{\pi(1)},\ldots,\theta_{\pi(n)}) = \phi_{t_1,\ldots,t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ *für alle Permutationen* $\pi \in S(n)$, $t_1,\ldots,t_n \in T$
  - *Konsistenz:* $\phi_{t_1,\ldots,t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \phi_{t_1,\ldots,t_n,\ldots,t_d}(\theta_1,\ldots,\theta_n,0,\ldots,0)$ *für alle* $n \leq d$, $t_1,\ldots,t_n \in T$
- $\Rightarrow \exists$ *stochastischer Prozess* $\{X(t)\}_{t\in T}$ *mit endlichen Verteilungen von Rang n gegeben durch* $\{P_{t_1,\ldots,t_n}\}_{t_1,\ldots,t_n}$

2. Schritt

Theorem (Kolmogorov)

- $\{P_{t_1,t_2,\ldots,t_n}\}_{t_1,\ldots,t_n \in T}$ *W'Maße auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$
- $\phi_{t_1,\ldots,t_n}$*: charakteristische Funktion von* $P_{t_1,\ldots,t_n}$
- *Angenommen*
  - *Symmetrie:* $\phi_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}(\theta_{\pi(1)},\ldots,\theta_{\pi(n)}) = \phi_{t_1,\ldots,t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ *für alle Permutationen* $\pi \in S(n)$, $t_1,\ldots,t_n \in T$
  - *Konsistenz:* $\phi_{t_1,\ldots,t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \phi_{t_1,\ldots,t_n,\ldots,t_d}(\theta_1,\ldots,\theta_n,0,\ldots,0)$ *für alle* $n \leq d$, $t_1,\ldots,t_n \in T$
- $\Rightarrow \exists$ *stochastischer Prozess* $\{X(t)\}_{t\in T}$ *mit endlichen Verteilungen von Rang n gegeben durch* $\{P_{t_1,\ldots,t_n}\}_{t_1,\ldots,t_n}$

- Im konkreten Fall: beide Bedingungen erfüllt

Linearität

Theorem

- *Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in F$. Dann gilt*

Linearität

Theorem

- *Seien* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in F$. *Dann gilt*
- $I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2)$ *f.s.*

Linearität

Theorem

- *Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in F$. Dann gilt*
- $I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2)$ *f.s.*

- $f_3 := a_1 f_1 + a_2 f_2$, $a_3 = -1$

Linearität

Theorem

- *Seien* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in F$. *Dann gilt*
- $I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2)$ *f.s.*

- $f_3 := a_1 f_1 + a_2 f_2$, $a_3 = -1$
- $\mathbb{E}\exp(i\theta(a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2) - I(f_3))) =$

$$\exp\left(-\int_E \left|\sum_{j=1}^{3} \theta a_j f_j(x)\right|^{\alpha} (1 - i\beta(x)\mathrm{sign}(\sum_{j=1}^{3} \theta a_j f_j(x)) \tan(\pi\alpha/2))m(dx)\right)$$

$= 1$,

da $a_1 f_1 + a_2 f_2 - f_3 = 0$.

Stabile stochastische Prozesse - Definition

Stabile Integrale

α-stabile Zufallsmaße

Notationen:

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W'raum
- $L^0(\Omega)$: reellwertige ZVen

Notationen:

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W'raum
- $L^0(\Omega)$: reellwertige ZVen
- $(E, \mathcal{E}, m)$ Maßraum
- $\beta : E \to [-1, 1]$ messbar
- $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\}$

Notationen:

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W'raum
- $L^0(\Omega)$: reellwertige ZVen
- $(E, \mathcal{E}, m)$ Maßraum
- $\beta : E \to [-1, 1]$ messbar
- $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\}$
- Für $M : \mathcal{E}_0 \to L^0(\Omega)$ gelte
  - M σ-additiv: $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, $A \in \mathcal{E}_0 \Rightarrow M(A) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$ f.s.
  - M independently scattered: $A_1, \ldots, A_k$ pw. disjunkt
    $\Rightarrow\ M(A_1), \ldots, M(A_k)$ unabhängig

Ziel:

- Definition stochastischer Prozesse $\{M(A)\}_{A \in \mathcal{E}_0}$

Ziel:

- Definition stochastischer Prozesse $\{M(A)\}_{A\in\mathcal{E}_0}$
- Eigenschaften
  - $M(A)$ α-stabil
  - $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ A \in \mathcal{E}_0 \Rightarrow\ M(A) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$ f.s.
  - $A_1, \ldots, A_k$ pw. disjunkt $\Rightarrow\ M(A_1), \ldots, M(A_k)$ unabhängig

Ziel:

- Definition stochastischer Prozesse $\{M(A)\}_{A \in \mathcal{E}_0}$
- Eigenschaften
  - $M(A)$ α-stabil
  - $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, $A \in \mathcal{E}_0 \Rightarrow \; M(A) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$ f.s.
  - $A_1, \ldots, A_k$ pw. disjunkt $\Rightarrow \; M(A_1), \ldots, M(A_k)$ unabhängig
- Idee: Setze $M(A) = I(1_A)$

Definition

Sei $M : \mathcal{E}_0 \to L^0(\Omega)$ indep. scattered und σ-additiv, sodass $M(A) \sim S_\alpha((m(A))^{1/\alpha}, \int_A \beta(x)m(dx)/m(A), 0)$ für alle $A \in \mathcal{E}_0$. Dann heißt M *α-stabiles Zufallsmaß auf* $(E, \mathcal{E})$.

Definition

Sei $M : \mathcal{E}_0 \to L^0(\Omega)$ indep. scattered und σ-additiv, sodass $M(A) \sim S_\alpha((m(A))^{1/\alpha}, \int_A \beta(x)m(dx)/m(A), 0)$ für alle $A \in \mathcal{E}_0$. Dann heißt M *α-stabiles Zufallsmaß auf* $(E, \mathcal{E})$.

Definition

Sei $M : \mathcal{E}_0 \to L^0(\Omega)$ indep. scattered und σ-additiv, sodass $M(A) \sim S_\alpha((m(A))^{1/\alpha}, \int_A \beta(x)m(dx)/m(A), 0)$ für alle $A \in \mathcal{E}_0$. Dann heißt M *α-stabiles Zufallsmaß auf* $(E, \mathcal{E})$.

- Existenz: $M(A) = I(1_A)$

- $I(1_A) \sim S_\alpha(m(A)^{1/\alpha}, \int_A \beta(x) m(dx)/m(A), 0)$

- $I(1_A) \sim S_\alpha(m(A)^{1/\alpha}, \int_A \beta(x) m(dx)/m(A), 0)$
- independently scattered: $\mathbb{E}(\exp(i \sum_{j=1}^d \theta_j M(A_j))) =$

$$\exp\left(-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x)\right|^\alpha \left(1 - i\beta(x)\text{sign}(\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x)) \tan(\pi\alpha/2)\right) m(dx$$

- $I(1_A) \sim S_\alpha(m(A)^{1/\alpha}, \int_A \beta(x)m(dx)/m(A), 0)$
- independently scattered: $\mathbb{E}(\exp(i\sum_{j=1}^d \theta_j M(A_j))) =$

$$\exp\left(-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x)\right|^\alpha \left(1 - i\beta(x)\text{sign}(\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x)) \tan(\pi\alpha/2)\right) m(dx$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=1}^d \int_E |\theta_j|^\alpha 1_{A_j}(x)(1 - i\beta(x)\text{sign}(\theta_j 1_{A_j}(x)) \tan(\pi\alpha/2))m(dx)\right)$$

- $I(1_A) \sim S_\alpha(m(A)^{1/\alpha}, \int_A \beta(x)m(dx)/m(A), 0)$
- independently scattered: $\mathbb{E}(\exp(i\sum_{j=1}^d \theta_j M(A_j))) =$

$$\exp\left(-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x)\right|^\alpha \left(1 - i\beta(x)\text{sign}(\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x)) \tan(\pi\alpha/2)\right) m(dx$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=1}^d \int_E |\theta_j|^\alpha 1_{A_j}(x)(1 - i\beta(x)\text{sign}(\theta_j 1_{A_j}(x)) \tan(\pi\alpha/2))m(dx)\right)$$

$$= \prod_{j=1}^d \mathbb{E}(\exp(i\theta_j M(A_j)))$$

- f.s. Additivität

- f.s. Additivität

$$\sum_{i=1}^{n} M(A_i) = \sum_{i=1}^{n} I(1_{A_i}) = I\Big(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\Big) = M(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \text{ f.s.}$$

- σ-Additivität
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}_0$ pw. disjunkt, $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}_0$
- z.z. $M(B) - \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) = \lim_{n\to\infty} M(B \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j) = 0$ f.s.

- σ-Additivität
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}_0$ pw. disjunkt, $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}_0$
- z.z. $M(B) - \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) = \lim_{n\to\infty} M(B \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j) = 0$ f.s.

Theorem

- *Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige reellwertige ZVen*
- *Dann: $\sum_i \xi_i$ konvergiert f.s. $\iff$ $\sum_i \xi_i$ konvergiert in Verteilung*

- σ-Additivität
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}_0$ pw. disjunkt, $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}_0$
- z.z. $M(B) - \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) = \lim_{n\to\infty} M(B \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j) = 0$ f.s.

Theorem

- *Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige reellwertige ZVen*
- *Dann: $\sum_i \xi_i$ konvergiert f.s. $\iff$ $\sum_i \xi_i$ konvergiert in Verteilung*

- Genügt z.z. $M(B) - \sum_{i=1}^{n} M(A_i) = M(B \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j) \to 0$ in Verteilung

- Z.z.: $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \in \mathcal{E}_0, \bigcap_j B_j = \emptyset \Rightarrow M(B_n) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit

Theorem

- *Sei* $0 < \alpha < 2$, $\sigma > 0$
- $\exists C_1, C_2 > 0 \forall \beta \in [-1, 1] \forall \lambda > C_1$ *und* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ *gilt:*
- $\mathbb{P}(|X| > \lambda) \leq C_2 \lambda^{-\alpha}$

- Z.z.: $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \in \mathcal{E}_0$, $\bigcap_j B_j = \emptyset \Rightarrow M(B_n) \to 0$ in Wahrscheinlichkeit

Theorem

- *Sei* $0 < \alpha < 2$, $\sigma > 0$
- $\exists C_1, C_2 > 0 \forall \beta \in [-1, 1] \forall \lambda > C_1$ *und* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ *gilt:*
- $\mathbb{P}(|X| > \lambda) \leq C_2 \lambda^{-\alpha}$

- $M(B_n) \stackrel{d}{=} m(B_n)^{1/\alpha} X_n$, $X_n \sim S_\alpha(1, \beta_n, 0)$ für ein $\beta_n \in [-1, 1]$
- $\mathbb{P}(|M(B_n)| > \varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{-\alpha} m(B_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Beispiel

- $(E, \mathcal{E}, m) = ([0, \infty), \mathcal{B}, \nu_1)$, $\beta(x) = \beta$
- *M zugehöriges α-stabiles Maß*

Beispiel

- $(E, \mathcal{E}, m) = ([0, \infty), \mathcal{B}, \nu_1)$, $\beta(x) = \beta$
- *M zugehöriges α-stabiles Maß*
- *Dann: $X(t) = M([0, t])$ ist α-stabiler Lévy-Prozess*

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Literature I

- O. Kallenberg.
  Foundations of modern probability.
  Springer Verlag, 2002.
- G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu.
  Stable non-Gaussian processes: Stochastic models with infinite variance.
  Chapman & Hall, 1994.