Seminar Stochastische Geometrie

Streng stabile, symmetrisch stabile und Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren

Botschkarewa, Nadeshda
Instituts für Stochastik, Universität Ulm
21.11.2011

Gliederung

Gliederung

1. Allgemeine Vorgehensweise, Wiederholung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Allgemeine Vorgehensweise, Wiederholung

Theorem

Sei $X \in \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor.

- *Wenn alle Linearkombinationen $Y_b = \sum_{k=1}^d b_k X_k$ streng stabile Verteilungen haben, dann ist der Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ auch streng stabil.*
- *Wenn alle Linearkombinationen $Y_b = \sum_{k=1}^d b_k X_k$ symmetrisch stabil sind, dann ist X auch ein symmetrisch stabiler Vektor in $\mathbb{R}^d$.*

Allgemeine Vorgehensweise, Wiederholung

Theorem

Sei $X \in \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor.

- *Wenn alle Linearkombinationen $Y_b = \sum_{k=1}^d b_k X_k$ streng stabile Verteilungen haben, dann ist der Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ auch streng stabil.*
- *Wenn alle Linearkombinationen $Y_b = \sum_{k=1}^d b_k X_k$ symmetrisch stabil sind, dann ist X auch ein symmetrisch stabiler Vektor in $\mathbb{R}^d$.*

- Eigenschaften der streng α-stabilen, symmentrisch α-stabilen Zufallsvariablen

Allgemeine Vorgehensweise, Wiederholung

Theorem

Sei $X \in \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor.

- *Wenn alle Linearkombinationen $Y_b = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ streng stabile Verteilungen haben, dann ist der Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ auch streng stabil.*
- *Wenn alle Linearkombinationen $Y_b = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ symmetrisch stabil sind, dann ist X auch ein symmetrisch stabiler Vektor in $\mathbb{R}^d$.*

- Eigenschaften der streng α-stabilen, symmentrisch α-stabilen Zufallsvariablen
- Es gilt $Y_b \sim S_\alpha(\sigma_b, \beta_b, \mu_b)$, wobei $Y_b = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$

$$\beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)|^\alpha \operatorname{sign}(b,s)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)|^\alpha \Gamma(ds)},$$

$$\mu_b = \begin{cases} (b, \mu^0), & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ (b, \mu^0) - \frac{2}{\pi} \int_{S_d} (b,s) \ln|(b,s)| \Gamma(ds), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Streng stabile Zufallsvektoren
Eigenschaft

Satz (Strenge Stabilität einer Zufallsvariable)

- $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *mit* $\alpha \neq 1$ *ist streng stabil genau dann, wenn* $\mu = 0$ *ist.*
- $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *mit* $\alpha = 1$ *ist streng stabil genau dann, wenn* $\beta = 0$ *ist.*

Streng stabile Zufallsvektoren
Eigenschaft

Satz (Strenge Stabilität einer Zufallsvariable)

- $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *mit* $\alpha \neq 1$ *ist streng stabil genau dann, wenn* $\mu = 0$ *ist.*
- $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *mit* $\alpha = 1$ *ist streng stabil genau dann, wenn* $\beta = 0$ *ist.*

Für eine Zufallsvariable $Y_b \sim S_\alpha(\sigma_b, \beta_b, \mu_b)$ mit $Y_b = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ gilt

$$\beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)|^\alpha \text{sign}(b,s)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)|^\alpha \Gamma(ds)},$$

$$\mu_b = \begin{cases} (b, \mu^0), & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ (b, \mu^0) - \frac{2}{\pi} \int_{S_d} (b,s) \ln|(b,s)| \Gamma(ds), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Streng stabile Zufallsvektoren
Eigenschaft

- Im Fall $\alpha = 1$ folgt aus $0 \overset{!}{=} \beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)| \mathsf{sign}(b,s) \Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)| \Gamma(ds)}$

Streng stabile Zufallsvektoren
Eigenschaft

- Im Fall $\alpha = 1$ folgt aus $0 \overset{!}{=} \beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)| \mathsf{sign}(b,s)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)|\Gamma(ds)}$

  $0 \overset{!}{=} \int_{S_d} |(b,s)| \mathsf{sign}(b,s)\Gamma(ds) = \int_{S_d} (b,s)\Gamma(ds) = \sum_{k=1}^{d} b_k \int_{S_d} s_k \Gamma(ds)$,

Streng stabile Zufallsvektoren
Eigenschaft

- Im Fall $\alpha = 1$ folgt aus $0 \overset{!}{=} \beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)| \mathrm{sign}(b,s)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)|\Gamma(ds)}$
  $0 \overset{!}{=} \int_{S_d} |(b,s)| \mathrm{sign}(b,s)\Gamma(ds) = \int_{S_d} (b,s)\Gamma(ds) = \sum_{k=1}^{d} b_k \int_{S_d} s_k \Gamma(ds)$, d.h.

$$\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \;\forall\; k = 1, \ldots, d$$

Streng stabile Zufallsvektoren
Eigenschaft

- Im Fall $\alpha = 1$ folgt aus $0 \overset{!}{=} \beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)| \text{sign}(b,s) \Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)| \Gamma(ds)}$
  $0 \overset{!}{=} \int_{S_d} |(b,s)| \text{sign}(b,s) \Gamma(ds) = \int_{S_d} (b,s) \Gamma(ds) = \sum_{k=1}^{d} b_k \int_{S_d} s_k \Gamma(ds)$, d.h.

$$\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \ \forall \ k = 1, \dots, d$$

- Sei $\alpha \neq 1$, dann muss $\mu_b = (b, \mu^0) = \sum_{k=1}^{d} b_k \mu_k^0 \overset{!}{=} 0$ gelten, d.h. $\mu^0 = 0$

Streng stabile Zufallsvektoren
Eigenschaft

- Im Fall $\alpha = 1$ folgt aus $0 \stackrel{!}{=} \beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)| \text{sign}(b,s)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)|\Gamma(ds)}$

  $0 \stackrel{!}{=} \int_{S_d} |(b,s)| \text{sign}(b,s)\Gamma(ds) = \int_{S_d} (b,s)\Gamma(ds) = \sum_{k=1}^{d} b_k \int_{S_d} s_k \Gamma(ds)$, d.h.

$$\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \ \forall \ k = 1, \ldots, d$$

- Sei $\alpha \neq 1$, dann muss $\mu_b = (b, \mu^0) = \sum_{k=1}^{d} b_k \mu_k^0 \stackrel{!}{=} 0$ gelten, d.h. $\mu^0 = 0$

Satz

Ein Vektor $X \in \mathbb{R}^d$ ist genau dann streng α-stabil mit $0 < \alpha \leq 2$, wenn

- $\alpha \neq 1$: $\mu^0 = 0$.
- $\alpha = 1$: $\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \ \forall \ k = 1, \ldots, d$

Streng stabile Zufallsvektoren
Komponenteneigenschaft

Für eine Zufallsvariable $Y_b \sim S_\alpha(\sigma_b, \beta_b, \mu_b)$ mit $Y_b = \sum_{k=1}^d b_k X_k$ gilt

$$\beta_b = \frac{\int_{S_d} |(b,s)|^\alpha \mathrm{sign}(b,s)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b,s)|^\alpha \Gamma(ds)},$$

$$\mu_b = \begin{cases} (b,\mu^0), & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ (b,\mu^0) - \frac{2}{\pi}\int_{S_d}(b,s)\ln|(b,s)|\Gamma(ds), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Es gilt dann $\forall X_k,\ k = 1, \dots, d$

$$\beta_k = \frac{\int_{S_d} |s_k|^\alpha \mathrm{sign}(s_k)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |s_k|^\alpha \Gamma(ds)},$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mu_k^0, & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \mu_k^0 - \frac{2}{\pi}\int_{S_d} s_k \ln|s_k|\Gamma(ds), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Streng stabile Zufallsvektoren
Komponenteneigenschaft

Satz

Ein Vektor $X \in \mathbb{R}^d$ ist genau dann streng α-stabil mit $0 < \alpha \leq 2$, wenn

- $\alpha \neq 1$: $\mu^0 = 0$.
- $\alpha = 1$: $\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \ \forall\ k = 1, \ldots, d$

Es gilt dann $\forall X_k$

$$\mu_k = \mu_k^0, \text{ für } \alpha \neq 1$$

$$\beta_k = \frac{\int_{S_d} s_k \Gamma(ds)}{\int_{S_d} |s_k| \Gamma(ds)}, \text{ für } \alpha = 1$$

Streng stabile Zufallsvektoren
Komponenteneigenschaft

Satz

Ein Vektor $X \in \mathbb{R}^d$ ist genau dann streng α-stabil mit $0 < \alpha \leq 2$, wenn

- $\alpha \neq 1$: $\mu^0 = 0$.
- $\alpha = 1$: $\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \; \forall \; k = 1, \ldots, d$

Es gilt dann $\forall X_k$

$$\mu_k = \mu_k^0, \text{ für } \alpha \neq 1$$
$$\beta_k = \frac{\int_{S_d} s_k \Gamma(ds)}{\int_{S_d} |s_k| \Gamma(ds)}, \text{ für } \alpha = 1$$

Korollar

Sei ein Vektor $X = (X_1, \ldots, X_d)$ α-stabil in $\mathbb{R}^d$ mit dem Stabilitätsfaktor $0 < \alpha \leq 2$. Dann ist der Vektor X nur dann streng stabil, wenn alle seine Komponente $X_1, \ldots, X_d$ streng stabile Zufallvariable sind.

Symmetrisch α-stabile $(S\alpha S)$ Zufallsvektoren Eigenschaften

Definition

Ein stabiler Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ heißt **symmetrisch stabil**, wenn X die Gleichung

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \mathbb{P}\{-X \in A\}$$

für Borel-Mengen $A \in \mathbb{R}^d$ erfüllt.

Symmetrisch α-stabile $(S\alpha S)$ Zufallsvektoren Eigenschaften

Definition

Ein stabiler Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ heißt **symmetrisch stabil**, wenn X die Gleichung

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \mathbb{P}\{-X \in A\}$$

für Borel-Mengen $A \in \mathbb{R}^d$ erfüllt.

Theorem

Ein Zufallsvektor X ist dann symmetrisch α-stabil mit dem Stabilitätsindex $0 < \alpha < 2$ in $\mathbb{R}^d$, wenn ein eindeutiges endliches symmetrisches Maß Γ auf S_d existiert so, dass die charakteristische Funktion lautet

$$\Phi_\alpha(\theta) = exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right\}.$$

Γ ist das Spektral-Maß des symmetrisch α-stabilen Zufallsvektors X.

Symmetrisch α-stabile $(S\alpha S)$ Zufallsvektoren Eigenschaften

Beweis:

$$\Phi_\alpha(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta,s)|^\alpha \left(1 - i\,\mathrm{sign}((\theta,s))\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(ds) + i(\theta,\mu^0)\right\}, \\ \text{mit } \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta,s)| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\mathrm{sign}((\theta,s))\ln|(\theta,s)|\right)\Gamma(ds) + i(\theta,\mu^0)\right\}, \\ \text{mit } \alpha = 1 \end{cases}$$

Symmetrisch α-stabile $(S\alpha S)$ Zufallsvektoren Eigenschaften

Beweis:

$$\Phi_\alpha(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta,s)|^\alpha \left(1 - i\,\mathrm{sign}((\theta,s))\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(ds) + i(\theta,\mu^0)\right\}, \\ \text{mit } \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta,s)| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\mathrm{sign}((\theta,s))\ln|(\theta,s)|\right)\Gamma(ds) + i(\theta,\mu^0)\right\}, \\ \text{mit } \alpha = 1 \end{cases}$$

Symmetrie:

$$\Phi_\alpha(\theta) = \exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta,s)|^\alpha \Gamma(ds)\right\} \tag{1}$$

keine Komponenteneigenschaft

Satz

Sei $G \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. G ist genau dann symmetrisch, wenn $\beta = 0$ und $\mu = 0$.

keine Komponenteneigenschaft

Satz

Sei $G \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. G ist genau dann symmetrisch, wenn $\beta = 0$ und $\mu = 0$.

Beispiel:
Betrachten i.i.d. 1-stabile Zufallsvariable $X_1, X_2, X_3 \sim S_1(1, 1, 0)$
$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$ mit $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_2 - X_3$

keine Komponenteneigenschaft

Satz

Sei $G \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. G ist genau dann symmetrisch, wenn $\beta = 0$ und $\mu = 0$.

Beispiel:
Betrachten i.i.d. 1-stabile Zufallsvariable $X_1, X_2, X_3 \sim S_1(1, 1, 0)$
$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$ mit $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_2 - X_3$
Mit

$$Y_1 = X_1 - X_2 \sim S_1(\sigma_{Y_1}, \overbrace{\frac{\beta_1\sigma_1 - \beta_2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}}^{=0}, \underbrace{\mu_1 - \mu_2}_{=0} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\ln(|-1|)}_{=0} \sigma_2\beta_2),$$

$$Y_2 = X_2 - X_3 \sim S_1(\sigma_{Y_2}, \overbrace{\frac{\beta_2\sigma_2 - \beta_3\sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3}}^{=0}, \underbrace{\mu_2 - \mu_3}_{=0} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\ln(|-1|)}_{=0} \sigma_3\beta_3),$$

gilt $Y_1 \sim S_1(\sigma_{Y_1}, 0, 0)$ und $Y_2 \sim S_1(\sigma_{Y_2}, 0, 0) \Longrightarrow$ die Symmetrie der beiden Zufallsvariablen Y_1 und Y_2

keine Komponenteneigenschaft

Bilden wir analog eine Linearkombination von Y_1 und Y_2

$$\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2 = \theta_1 X_1 + (\theta_2 - \theta_1) X_2 - \theta_2 X_3$$

keine Komponenteneigenschaft

Bilden wir analog eine Linearkombination von Y_1 und Y_2

$$\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2 = \theta_1 X_1 + (\theta_2 - \theta_1) X_2 - \theta_2 X_3$$

$$\begin{aligned}
\mu_{(\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2)} \overset{X_i \sim S_1(1,1,0)}{=} & \underbrace{\theta_1 \mu_1}_{=0} - \frac{2}{\pi} \theta_1 \ln(|\theta_1|) \underbrace{\sigma_1 \beta_1}_{=1} \\
& + \underbrace{(\theta_2 - \theta_1)\mu_2}_{=0} - \frac{2}{\pi}(\theta_2 - \theta_1) \ln(|(\theta_2 - \theta_1)|) \underbrace{\sigma_2 \beta_2}_{=1} \\
& - \underbrace{\theta_2 \mu_3}_{=0} + \frac{2}{\pi} \theta_2 \ln(|-\theta_2|) \underbrace{\sigma_3 \beta_3}_{=1} \\
& = -\frac{2}{\pi} \Big(\theta_1 \big(\ln(|\theta_1|) - \ln(|\theta_2 - \theta_1|) \big) - \theta_2 \big(\ln(|(\theta_2 - \theta_1)| - \ln(|-\theta_2|) \big) \Big)
\end{aligned}$$

keine Komponenteneigenschaft

Bilden wir analog eine Linearkombination von Y_1 und Y_2

$$\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2 = \theta_1 X_1 + (\theta_2 - \theta_1) X_2 - \theta_2 X_3$$

$$\begin{aligned}
\mu_{(\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2)} \overset{X_i \sim S_1(1,1,0)}{=} & \underbrace{\theta_1 \mu_1}_{=0} - \frac{2}{\pi} \theta_1 \ln(|\theta_1|) \underbrace{\sigma_1 \beta_1}_{=1} \\
& + \underbrace{(\theta_2 - \theta_1)\mu_2}_{=0} - \frac{2}{\pi} (\theta_2 - \theta_1) \ln(|(\theta_2 - \theta_1)|) \underbrace{\sigma_2 \beta_2}_{=1} \\
& - \underbrace{\theta_2 \mu_3}_{=0} + \frac{2}{\pi} \theta_2 \ln(|-\theta_2|) \underbrace{\sigma_3 \beta_3}_{=1} \\
& = -\frac{2}{\pi} \Big(\theta_1 \big(\ln(|\theta_1|) - \ln(|\theta_2 - \theta_1|) \big) - \theta_2 \big(\ln(|(\theta_2 - \theta_1)| - \ln(|-\theta_2|) \big) \Big)
\end{aligned}$$

$\forall \theta_i \neq 0, i = 1, 2$ gilt $\mu_{(\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2)} \neq 0$. Y ist nicht symmetrisch stabil, obwohl seine Komponente Y_1 und Y_2 symmetrisch α-stabil sind.

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

Proposition (Transformation)

Sei $G \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$ *mit* $0 < \alpha < \alpha' \leq 2$ *und sei* A *weiterhin eine* $\frac{\alpha}{\alpha'}$*-stabile Zufallsvariable mit* $A \sim S_{\frac{\alpha}{\alpha'}}\Big((\cos\frac{\pi\alpha}{2\alpha'})^{\frac{\alpha'}{\alpha}}, 1, 0\Big)$. *Die Laplacetransformierte hat die Form*

$$\mathbb{E}\mathit{exp}(-\gamma A) = \mathit{exp}\Big\{-\gamma^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\Big\}, \gamma > 0$$

und A *wird von* G *als unabhängig angenommen. Dann gilt:*

$$X = A^{\frac{1}{\alpha'}} G \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0).$$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

Proposition (Transformation)

Sei $G \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$ *mit* $0 < \alpha < \alpha' \leq 2$ *und sei* A *weiterhin eine* $\frac{\alpha}{\alpha'}$*-stabile Zufallsvariable mit* $A \sim S_{\frac{\alpha}{\alpha'}}\Big((cos\frac{\pi\alpha}{2\alpha'})^{\frac{\alpha'}{\alpha}}, 1, 0\Big)$*. Die Laplacetransformierte hat die Form*

$$\mathbb{E}exp(-\gamma A) = exp\Big\{ -\gamma^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \Big\}, \gamma > 0$$

und A *wird von* G *als unabhängig angenommen. Dann gilt:*

$$X = A^{\frac{1}{\alpha'}} G \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0).$$

Anwendung:
Seien $G \sim N(0, \sigma^2)$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}(\sigma, 1, 0)$, dann gilt

$$X = A^{\frac{1}{2}} G \sim S\alpha S.$$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

- Wähle $\alpha' = 2$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right),\ \alpha < 2$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

- Wähle $\alpha' = 2$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right),\ \alpha < 2$
- $G = (G_1, \dots, G_d)$ ein Gauß'sche Zufallsvektor mit $\mu \in \mathbb{R}^d, \mu = 0$ unabhängig von A

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

- Wähle $\alpha' = 2$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right),\ \alpha < 2$
- $G = (G_1, \ldots, G_d)$ ein Gauß'sche Zufallsvektor mit $\mu \in \mathbb{R}^d, \mu = 0$ unabhängig von A
- Betrachte den Zufallsvektor $X = (A^{\frac{1}{2}} G_1, \ldots, A^{\frac{1}{2}} G_d)$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

- Wähle $\alpha' = 2$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right),\ \alpha < 2$
- $G = (G_1, \dots, G_d)$ ein Gauß'sche Zufallsvektor mit $\mu \in \mathbb{R}^d, \mu = 0$ unabhängig von A
- Betrachte den Zufallsvektor $X = (A^{\frac{1}{2}} G_1, \dots, A^{\frac{1}{2}} G_d)$
- $\sum_{k=1}^{d} b_k A^{\frac{1}{2}} G_k = A^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{d} b_k G_k$ mit $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

- Wähle $\alpha' = 2$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right),\ \alpha < 2$
- $G = (G_1, \ldots, G_d)$ ein Gauß'sche Zufallsvektor mit $\mu \in \mathbb{R}^d, \mu = 0$ unabhängig von A
- Betrachte den Zufallsvektor $X = (A^{\frac{1}{2}} G_1, \ldots, A^{\frac{1}{2}} G_d)$
- $\sum_{k=1}^{d} b_k A^{\frac{1}{2}} G_k = A^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{d} b_k G_k$ mit $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=1}^{d} b_k G_k$ ist normalverteilt mit $\mu_b = 0$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

- Wähle $\alpha' = 2$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right),\ \alpha < 2$
- $G = (G_1, \ldots, G_d)$ ein Gauß'sche Zufallsvektor mit $\mu \in \mathbb{R}^d, \mu = 0$ unabhängig von A
- Betrachte den Zufallsvektor $X = (A^{\frac{1}{2}} G_1, \ldots, A^{\frac{1}{2}} G_d)$
- $\sum_{k=1}^{d} b_k A^{\frac{1}{2}} G_k = A^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{d} b_k G_k$ mit $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=1}^{d} b_k G_k$ ist normalverteilt mit $\mu_b = 0$
- Mit $\alpha' = 2$ gilt $\sum_{k=1}^{d} b_k A^{\frac{1}{2}} G_k \sim S\alpha S$, dann hat der Zufallsvektor $X = (A^{\frac{1}{2}} G_1, \ldots, A^{\frac{1}{2}} G_d)$ eine symmetrische α-stabile Verteilung

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren
Definition

Definition

Ein Vektor $X = (A^{\frac{1}{2}} G_1, \ldots, A^{\frac{1}{2}} G_d)$ mit $G_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ $\forall i = 1, \ldots, d$ und $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right), \alpha < 2$ heißt ein **Sub-Gauß'schen symmetrisch α-stabiler Vektor** in $\mathbb{R}^d$ mit dem zugrundeliegenden Gauß'schen-Vektor $G \in \mathbb{R}^d$.

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren charakteristische Funktion

Proposition

Der Sub-Gauß'schen symmetrisch α-stabile Zufallsvektor X hat die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}\mathit{exp}\Big\{ i \sum_{k=1}^{d} \theta_k X_k \Big\} = \mathit{exp}\Big\{ - \Big| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \theta_i \theta_j R_{ij} \Big|^{\frac{\alpha}{2}} \Big\},$$

wobei $R_{ij} = \mathbb{E} G_i G_j, i, j = 1, \ldots, d$ sind die Kovarianzen des Gauß'schen Zufallsvektors $(G_1, \ldots, G_d)$.

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren charakteristische Funktion

Beweis: 1.

Proposition

Die Laplacetransformierte einer α-stabilen Zufallsvariable $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ mit $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$ lautet

$$\mathbb{E}exp(-\gamma X) = exp\Big\{ - \frac{\sigma^\alpha}{cos\frac{\pi\alpha}{2}} \gamma^\alpha \Big\},$$

wobei $\alpha \neq 1$ ist.

Mit der Proposition erhalten wir die Laplacetransformierte $\mathbb{E}\exp(-\gamma A) = \exp(-\gamma^{\frac{\alpha}{2}}), \gamma > 0$ von $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\Big(\big(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\big)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\Big)$.

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren charakteristische Funktion

2.

$$\mathbb{E}\mathsf{exp}\left\{ i \sum_{k=1}^{d} \theta_k X_k \right\} = \mathbb{E}\mathsf{exp}\left\{ i A^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{d} \theta_k G_k \right\}$$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren charakteristische Funktion

2.

$$\mathbb{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{d}\theta_k X_k\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{iA^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{d}\theta_k G_k\right\}$$

$$\overset{\text{Unabhängigkeit von } G \text{ und } A}{=} \mathbb{E}\mathbb{E}\left[\exp\left\{iA^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{d}\theta_k G_k\right\}\Big| A\right]$$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren charakteristische Funktion

2.

$$\mathbb{E}\mathrm{exp}\Big\{i\sum_{k=1}^{d}\theta_k X_k\Big\} = \mathbb{E}\mathrm{exp}\Big\{iA^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{d}\theta_k G_k\Big\}$$

$$\overset{\text{Unabhängigkeit von } G \text{ und } A}{=} \mathbb{E}\mathbb{E}\Big[\mathrm{exp}\Big\{iA^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{d}\theta_k G_k\Big\}\Big|A\Big]$$

$$\overset{\text{Bedingter Erwartungswert}}{=} \mathbb{E}\mathrm{exp}\Big\{-A\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}R_{ij}\theta_i\theta_j\Big\}$$

Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren charakteristische Funktion

2.

$$\mathbb{E}\exp\Big\{i\sum_{k=1}^{d}\theta_k X_k\Big\} = \mathbb{E}\exp\Big\{iA^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{d}\theta_k G_k\Big\}$$

$$\overset{\text{Unabhängigkeit von } G \text{ und } A}{=} \mathbb{E}\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{iA^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{d}\theta_k G_k\Big\}\Big| A\Big]$$

$$\overset{\text{Bedingter Erwartungswert}}{=} \mathbb{E}\exp\Big\{-A\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}R_{ij}\theta_i\theta_j\Big\}$$

$$\overset{1}{=} \exp\Big\{-\Big|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\theta_i\theta_j R_{ij}\Big|^{\frac{\alpha}{2}}\Big\}$$

Zusammenfassung

1. Streng stabile Zufallsvektoren (Komponenteneigenschaft)

$$X \in \mathbb{R}^d \text{ streng } \alpha\text{-stabil, } \alpha \in (0,2] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 1: & \mu^0 = 0 \\ \alpha = 1: & \int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \forall k = 1, \ldots, d \end{cases}$$

Zusammenfassung

1. Streng stabile Zufallsvektoren (Komponenteneigenschaft)

$$X \in \mathbb{R}^d \text{ streng } \alpha\text{-stabil, } \alpha \in (0,2] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 1: & \mu^0 = 0 \\ \alpha = 1: & \int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \forall k = 1, \ldots, d \end{cases}$$

2. Symmetrisch stabile Zufallsvektoren (keine Komponenteneigenschaft)

   Charakteristische Funktion: $\Phi_\alpha(\theta) = \exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right\}$

   Das Spektral-Maß Γ ist auch symmetrisch.

Zusammenfassung

1. Streng stabile Zufallsvektoren (Komponenteneigenschaft)

$$X \in \mathbb{R}^d \text{ streng } \alpha\text{-stabil, } \alpha \in (0,2] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 1: & \mu^0 = 0 \\ \alpha = 1: & \int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0 \forall k = 1, \ldots, d \end{cases}$$

2. Symmetrisch stabile Zufallsvektoren (keine Komponenteneigenschaft)

   Charakteristische Funktion: $\Phi_\alpha(\theta) = \exp\left\{ -\int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right\}$

   Das Spektral-Maß Γ ist auch symmetrisch.

3. Sub-Gauß'sche Zufallsvektoren

   3.1 Definition: $X = (A^{\frac{1}{2}} G_1, \ldots, A^{\frac{1}{2}} G_d)$ mit $G_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ $\forall i = 1, \ldots, d$ und

   $A \sim S_{\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, 1, 0\right), \alpha < 2$

   3.2 Charakteristische Funktion:

$$\mathbb{E}\exp\left\{ i \sum_{k=1}^{d} \theta_k X_k \right\} = \exp\left\{ -\left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \theta_i \theta_j R_{ij} \right|^{\frac{\alpha}{2}} \right\},$$