# Seminar Stabile Verteilungen

## Kovariation, Kovariationsnorm, James Orthogonalität, Kodifferenz

Stefan Funke

28. November 2011

# Inhaltsverzeichnis

# Kovariation

## Definition

Seien $(X_1, X_2) \sim S\alpha S$ verteilt mit $\alpha > 1$, und sei $\Gamma$ das Spektralmaß des Zufallsvektors $(X_1, X_2)$.
Dann heißt

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \, \Gamma(\mathrm{d}s)$$

die Kovariation von $X_1$ bezüglich $X_2$, mit $a^{<p>} := |a|^p \cdot sgn(a)$.

# Kovariation

## Beispiel: Normalverteilung

Für $\alpha = 2$ erhält man für die Kovariation eines symmetrischen, normalverteilten Zufallsvektors $(X_1, X_2)$:

$$[X_1, X_2]_2 = \frac{1}{2} Cov(X_1, X_2)$$

# Kovariation

Man kann eine äquivalente Definition der Kovariation angeben.

## Definition

Sei $(X_1, X_2) \sim S\alpha S$ mit $1 < \alpha \leq 2$.
Definiere $Y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$ mit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.
Dann ist $Y \sim S\alpha S$ verteilt und $\sigma(\theta_1, \theta_2)$ sei der Skalierungsparameter von $Y$.
Dann gilt:

$$[X_1, X_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1}$$

# Kovariation

## Lemma

Sei $X = (X_1, X_2, ..., X_n) \sim S\alpha S$, mit $\alpha > 1$ und Spektralmaß $\Gamma_X$, und sei $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k$ und $Z = \sum_{k=1}^n b_k X_k$. Dann

$$[Y, Z]_\alpha = \int_{S_n} (\sum_{k=1}^n a_k s_k)(\sum_{k=1}^n b_k s_k)^{<\alpha-1>} \Gamma_X(ds)$$

## Folgerung

Unter den Voraussetzungen des obigen Lemmas gilt:

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_n} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \Gamma_X(ds)$$

$$[X_1, X_1]_\alpha = \int_{S_n} |s_1|^\alpha \Gamma_X(ds) = \sigma_{X_1}^\alpha$$

mit $\sigma_{X_1}$ der Skalierungsparameter der Zufallsvariablen $X_1$.

# Eigenschaften der Kovariation

Im Folgenden sei $\alpha > 1$.

## Additivität im ersten Argument

Sei $(X_1, X_2, Y) \sim S\alpha S$.
Dann gilt $[X_1 + X_2, Y]_\alpha = [X_1, Y]_\alpha + [X_2, Y]_\alpha$.

## Skalierbarkeit

Sei $(X, Y) \sim S\alpha S,\ a, b \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $[aX, bY]_\alpha = ab^{<\alpha-1>}[X, Y]_\alpha$.

## Bemerkung

Die Kovariation ist linear im ersten Argument, aber nicht im zweiten Argument. Dort ist sie nicht einmal additiv.

# Eigenschaften der Kovariation

## Symmetrie

Die Kovariation ist im Allgemeinen nicht symmetrisch in ihren Argumenten und es gilt $[X, Y]_\alpha \neq [Y, X]_\alpha$.

## Unabhängigkeit

Falls $(X, Y) \sim S\alpha S$ und $X$ und $Y$ unabhängig sind, dann gilt $[X, Y]_\alpha = 0$.

## Bemerkung

Im Fall $\alpha = 2$, der Normalverteilung, gilt auch die Umkehrung. Für $1 < \alpha < 2$ folgt aus $[X, Y]_\alpha = 0$ jedoch nicht, dass $X$ und $Y$ unabhängig sind.

# Eigenschaften der Kovariation

## Additivität im zweiten Argument

Sei $(X, Y_1, Y_2) \sim S\alpha S, \alpha > 1$ und $Y_1, Y_2$ unabhängig. Dann gilt:

$$[X, Y_1 + Y_2]_\alpha = [X, Y_1]_\alpha + [X, Y_2]_\alpha$$

## Lemma: Zusammenhang mit gemischtem Moment $E(XY^{<p-1>})$

Sei $(X, Y) \sim S\alpha S, \alpha > 1$.
Für alle $1 < p < \alpha$ gilt:

$$\frac{E(XY^{<p-1>})}{E(|Y|^p)} = \frac{[X, Y]_\alpha}{\|Y\|_\alpha^\alpha}$$

wobei $\|Y\|_\alpha = \sigma_Y$ der Skalierungsparameter von Y ist.

# Die Kovariationsnorm

## Bezeichnung

Sei $X = (X_1, .., X_n) \sim S\alpha S$.
$S_\alpha := \{ \sum_{k=1}^{n} l_k X_k \mid l = (l_1, .., l_n) \in \mathbb{R}^n \}$
mit $dim(S_\alpha) = n$.
$S_\alpha$ ist ein linearer Raum.

## Definition

Für $Y \in S_\alpha$ mit $\alpha > 1$ heißt $\| Y \|_\alpha = ([Y, Y]_\alpha)^{1/\alpha}$ die Kovariationsnorm von $Y$.

# Eigenschaften der Kovariationsnorm

### Zusammenhang mit dem Skalierungsparameter

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ mit $\alpha > 1$.
Dann gilt $\|X\|_\alpha = \sigma$.

# Eigenschaften der Kovariationsnorm

## Normeigenschaften

Sei $X \sim S_\alpha(\sigma_X, 0, 0)$.

- $\|X\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow X = 0$ f.s.
- $aX \sim S_\alpha(|a|\sigma_X, 0, 0)$. Dann $\|aX\|_\alpha = |a|\sigma_X = |a|\|X\|_\alpha$ .
- Seien $X_1, X_2 \sim S\alpha S$. Dann $\|X_1 + X_2\|_\alpha \leq \|X_1\|_\alpha + \|X_2\|_\alpha$.

## Konvergenzeigenschaften

Konvergenz in $\|.\|_\alpha$ ist äquivalent zur Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und zur Konvergenz in $L^p$ für alle $p < \alpha$.

# James Orthogonalität

## Beispiel

Sei $\alpha = 2$. Betrachte den Raum $L_0^2(\Omega, F, P)$ der Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und endlichem zweiten Moment. $L_0^2(\Omega, F, P)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(X, Y) := Cov(X, Y) = E(XY)$.
Zwei normalverteilte Zufallsvariablen sind genau dann unabhängig, wenn sie in diesem Raum orthogonal zueinander stehen.

## Beispiel

Betrachte nun den Raum $S_\alpha$. Dies ist ein normierter Raum mit der Kovariationsnorm $\|.\|_\alpha^\alpha = [X, X]_\alpha$.
Aber $[X, Y]_\alpha$ definiert im Allgemeinen kein Skalarprodukt auf $S_\alpha$. Es gilt im Allgemeinen zum Beispiel keine Symmetrie.

# James Orthogonalität

Man definiert deshalb einen Orthogonalitätsbegriff auf einem normierten Raum.

### Definition

Sei $E$ ein normierter Vektorraum. $x$ heißt James-orthogonal zu $y$, für $x, y \in E$ (kurz: $x \perp_J y$), falls für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$

### Bemerkung

Aus $x \perp_J y$ folgt nicht $y \perp_J x$.

### Bemerkung

Falls E ein Prä-Hilbertraum ist, so gilt:
$x \perp_J y \Leftrightarrow x \perp y$ ($\perp$ bezüglich des Skalarproduktes von E).

# James Orthogonalität

### Satz

Sei $(X, Y) \sim S\alpha S, \alpha > 1$. Dann gilt:
$[X, Y]_\alpha = 0 \Leftrightarrow Y \perp_J X$

# James Orthogonalität

## Satz

Sei $1 < \alpha < 2$ und sei $dim(S_\alpha) \geq 3$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $X, Y \in S_\alpha : \; [X, Y]_\alpha = 0 \;\Rightarrow\; [Y, X]_\alpha = 0$
- $X, Y, Z \in S_\alpha : \; [X, Y]_\alpha = 0, [X, Z]_\alpha = 0 \;\Rightarrow\; [X, Y + Z]_\alpha = 0$
- $\exists$ Skalarprodukt $(.\,,.)$ auf $S_\alpha$ s.d. $\|X\|_\alpha = (X, X)^{1/2}$ für $X \in S_\alpha$.
- $S_\alpha$ besteht aus sub-Gauß'schen $S\alpha S$ Zufallsvariablen.

# James Orthogonalität

## Satz

Sei $1 < \alpha < 2$.
Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

- $X, Y \in S_\alpha : \; \|X\|_\alpha = \|Y\|_\alpha \;\Rightarrow\; [X, Y]_\alpha = [Y, X]_\alpha$
- $S_\alpha$ besteht aus sub-Gauß'schen $S\alpha S$ Zufallsvariablen.

## Satz

Sei $1 < \alpha \leq 2$ und sei $dim(S_\alpha) \geq 2$.
Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

- $X, Y \in S_\alpha : \; [X, Y]_\alpha = 0 \;\Rightarrow\; X, Y$ sind unabhängig.
- $\alpha = 2$, d.h. $S_\alpha$ besteht aus normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0.

# Kodifferenz

**Definition**

Seien $X, Y \sim S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$.
Dann heißt

$$\tau_{X,Y} = \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha - \|X - Y\|_\alpha^\alpha$$

die Kodifferenz von $X$ und $Y$.

Die Kodifferenz ist im Gegensatz zur Kovariation für alle $\alpha \in (0, 2]$ definiert.

# Eigenschaften der Kodifferenz

### Symmetrie

Seien $X, Y \sim S\alpha S$
Dann $\tau_{X,Y} = \tau_{Y,X}$

### Zusammenhang zur Normalverteilung

Seien $X, Y \sim S\alpha S$, $\alpha = 2$
Dann gilt $\tau_{X,Y} = Cov(X, Y)$

### Unabhängigkeit

Seien $X, Y \sim S\alpha S$

- $X, Y$ unabhängig $\Rightarrow \tau_{X,Y} = 0$
- $\tau_{X,Y} = 0$ und $0 < \alpha < 1 \Rightarrow X, Y$ unabhängig.

# Literatur


- Samorodnitsky / Taqqu: Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman & Hall 1994
- Zolotarev: Modern Theory of Summation of Random Variables, VSP 1997
- Wackernagel: Multivariate Geostatistics, Springer 1998