Stabile Zufallsvektoren und deren charakteristische Funktion

Zhang,Wei
14.10.2011

Gliederung

1. stabile Zufallsvektoren

2. charakteristische Funktion von α – stabile Zufallsvektor

Definition 1 (**stabile Zufallsvariable**)

Ein Zufallsvariable X heißt **stabile** Zufallsvariable, wenn für alle positive Zahlen ***a*** und ***b***, existiert ein positive Zahl ***c*** und ein reelle Zahl ***d***, sodass

$$aX_1 + bX_2 \overset{d}{=} cX + d$$

Hier sind $X, X_1 \text{ und } X_2$ die unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen.

Definition 2 (**stabile Zufallsvektoren**)

Ein Zufallsvektor $X = (X_1, X_{2, \ldots ,} X_d)$ ist ein **stabiler** Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$,

Wenn für alle positive Zahlen ***a*** und ***b*** eine positive Zahl ***c*** und ein Vektor ***D*** $\in \mathbb{R}^d$ existiert, sodass

$$aX^{(1)} + bX^{(2)} \stackrel{d}{=} cX + D \qquad (1)$$

Hier sind $X, X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ die unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren.

Bemerkungen

1. Der Vektor X heißt ***strikt stabil***, wenn (1) mit

D = 0 für alle ***a*** > 0 und ***b*** > 0 gilt.

2. Der Vektor X heißt ***symmetrisch stabil*** ,

wenn X stabil ist und die folgende Relation

$$P\left\{X \in K\right\} = P\left\{-X \in K\right\}$$

für alle Borelmengen K von $\mathbb{R}^d$ erfüllt ist.

(wie in $\mathbb{R}$, ein symmetrisch stabiler Vektor ist auch ein strikt stabiler Vektor.)

Satz 1

Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ ein stabiler (oder strikt stabiler; symmetrisch stabiler) Vektor in $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es ein Konstante $\alpha \in (0,2]$, sodass in (1)

$$c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \quad .$$

Außerdem, sind alle Linearkombinationen

$$Y = \sum_{k=1}^{d} l_k \bullet X_k$$

der Komponenten von X auch stabile (oder strikt stabile; symmetrisch stabile) Zufallsvariablen.

Korollar

Ein Zufallsvektor X ist stabil genau dann, wenn gilt $\exists \alpha \in (0,2],\ \forall n \geq 2,\ \exists \text{ Vektor } D_n$, sodass

$$X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(n)} \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + D_n \ , \qquad (2)$$

Hier sind $X, X^{(1)}, X^{(2)},\ \ldots ,X^{(n)}$ die unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren.

Definition 3 (α – stabil)

Ein Zufallsvektor X in $\mathbb{R}^d$ heißt **α–stabil**, wenn (1) gilt mit $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}$ oder wenn (2) gilt.

Der Index α ist der Stabilitätsindex oder der charakteristische Exponent des Vektors X

Wiederholung:

Satz 1:

Wenn X ein α–stabiler Zufallsvektor ist, dann sind alle Linearkombinationen $(l, X) = \sum_{i=1}^{d} l_i \bullet X_i$ stabile Zufallsvariablen.

Frage:

Gilt die Umkehrrichtung?

Umkehrrichtung

Sei X ein Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$,

(a). Wenn alle Linearkombinationen $Y = \sum_{k=1}^{d} l_k \bullet X_k$ strikt stabil sind, dann ist X ein strikt stabiler Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$.

(b). Wenn alle Linearkombinationen $Y = \sum_{k=1}^{d} l_k \bullet X_k$ symmetrisch stabil sind, dann ist X ein symmetrisch stabiler Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$.

(c). Wenn alle Linearkombinationen $Y = \sum_{k=1}^{d} l_k \bullet X_k$

stabil mit

$$\alpha \geq 1$$

sind, dann ist X ein stabiler Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$.

charakteristische Funktion von α – stabile Zufallsvektor

Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ ein α-stabiler Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die charakteristische Funktion durch

$$\Phi_X(\theta) = E\exp\{i \bullet (\theta, X)\} = E\exp\{i \bullet \sum_{k=1}^{d} \theta_k X_k\}$$

Satz2

Sei 0 < α < 2. $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ ist genau dann ein α – stabiler Zufallsvektor, wenn es ein endliches Maß Γ auf der Einheitssphäre S_d in $\mathbb{R}^d$ und einen Vektor μ^0 in $\mathbb{R}^d$ gibt, sodass

(a) Wenn $\alpha \neq 1$,

$$\Phi_X(\theta) = \exp\{-\int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha (1 - i\ sign((\theta, s)) \tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds) + i(\theta, \mu^0)\}.$$

(b) Wenn $\alpha = 1$,

$$\Phi_X(\theta) = \exp\{-\int_{S_d} |(\theta, s)|(1 - i\frac{2}{\pi}\ sign((\theta, s)) \log|(\theta, s)|)\Gamma(ds) + i(\theta, \mu^0)\}.$$

Das Paar (Γ, μ^0) ist eindeutig.

Definition 4

Der Vektor X im Satz 2 hat die spektrale Darstellung $\left(\Gamma, \mu^0\right)$.

Das Maß Γ heißt das spektrale Maß des α – stabilen Zufallsvektors X.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur:

Samorodnitsky / Taqqu: Stable Non-Gaussian Random Processes,
Chapman & Hall 1994