Konstruktive Definition stabiler Integrale und deren Eigenschaften

Yundi Wang

19.Dez 2011

Inhaltsverzeichnis

Inhalt

stabile Verteilung

Definition:
Ein Zufallsvariable X hat eine *stabile Verteilung*, wenn
$\exists\ 0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$,$-1 \leq \beta \leq 1$ und μ reell, so dass die charakteristische Funktion von X die folgende Form hat

$$E\left[exp\left(i\theta X\right)\right] =$$

$$\begin{cases} exp\left\{-\sigma^{\alpha}\left|\theta\right|^{\alpha}\left(1 - i\beta\left(\text{sign}\theta\right)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu\theta\right\} & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ exp\left\{-\sigma\left|\theta\right|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}\left(\text{sign}\theta\right) ln\left|\theta\right|\right) + i\mu\theta\right\} & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

Notation:$S_{\alpha}\left(\sigma, \beta, \mu\right)$

$\alpha-$ stabiles Zufallsmaß

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $L^0(\Omega)$ die Menge der reellen Zufallsvariablen. Sei (E, ϵ, m) ein Maßraum

$$\beta : E \to [-1, 1]\,, \text{ eine messbare Funktion und}$$

$$\epsilon_0 = \{A \in \epsilon : m(A) < \infty\} \text{ eine Teilmenge von } \epsilon,$$

die alle endlichen m-messbaren Mengen enthält

Definition:

Eine Mengefunktion $M : \epsilon_0 \to L^0\left(\Omega\right)$ heißt $\alpha-$ stabiles Zufallsmaß auf (E, ϵ) mit Kontrollmaß m und Schiefeintensität β, falls

- M eine unabhängig verstreute $\sigma-$ additive Mengenfunktion ist. Unabhängig verstreute Mengenfunktion bedeutet, dass $M\left(A_1\right), M\left(A_2\right), \ldots, M\left(A_k\right)$ unabhängig sind, wenn $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \epsilon_0$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$
- $\forall A \in \epsilon_0$ gilt

$$M\left(A\right) \sim S_\alpha\left(\left(m\left(A\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\int_A \beta\left(x\right) m\left(dx\right)}{m\left(A\right)}, 0\right)$$

$I(f)$ als Stochastische Prozess

Definition:
Sei $\{I(f), f \in F\}$ ein stochastischer Prozess mit endlich-dimensionalen Verteilungen $P_{f_1,\ldots,f_d}$, wobei ihre charakteristische Funktion die Form hat

1. Falls $\alpha \neq 1$:

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1,\ldots,\theta_d) =$$
$$exp\left\{-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right|^\alpha \left(1 - i\beta(x)\, sign\left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right) tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) m(dx)\right\}$$

2. Falls $\alpha = 1$:

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1,\ldots,\theta_d) =$$
$$exp\left\{-\int_E \left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x)\, sign\left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right) ln\left|\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x)\right|\right) m(dx)\right\}$$

Dann heißt $I(f)$ $\alpha-$stabiles Intergral von f. Das Maß m wird Kontrollmaß und die Funktion β wird Schiefeintensität genannt.

Inhalt

Gegeben:
Sei M ein $\alpha-$stabiles Zufallsmaß auf (E, ϵ) mit einem Kontrollmaß m und Schiefeintensität β.
Sei $\epsilon_0 = \{A \in \epsilon : m(A) < \infty\}$.

Ziel:
Definiere

$$I(f) = \int_E f(x)\, M(dx)$$

für $\forall f : E \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\int_E |f(x)|^\alpha\, m(dx) < \infty \tag{1}$$

und

$$\int_E |f(x)\, \beta(x)\, ln\, |f(x)||\, m(dx) < \infty \tag{2}$$

falls $\alpha = 1$.

Notation:
Bezeichnen wir

$$F = \begin{cases} L^{\alpha}(E, \epsilon, m) & \alpha \neq 1 \\ \mathscr{F}(m, \beta) \cap L^{1}(E, \epsilon, m) & \alpha = 1 \end{cases}$$

wobei

$$L^{\alpha}(E, \epsilon, m) =$$
$$\left\{ f : f \text{ ist meßbar}, \int_{E} |f(x)|^{\alpha} m(dx) < \infty \right\}$$
$$\mathscr{F}(m, \beta) =$$
$$\left\{ f : \int_{E} |f(x) \beta(x) \, ln |f(x)|| \, m(dx) < \infty \right\}$$

und es gilt: F ist ein linearer Raum.

Vorgehensweise

- Konstruiere $I\left(f\right)$, wobei f eine einfache Funktion ist.
- Approximiere f durch $f^{(n)}$, eine Folge von einfachen Funktionen, wobei $f = lim_{n\rightarrow\infty}f^{(n)}$ gilt.
- Äquivalenz

einfache Funktion

Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ heißt einfach, falls

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{I}_{A_j}(x)$$

wobei $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \in \epsilon_0\ A_i \neq A_j,\ i \neq j$ ist und $c_j \in \mathbb{R}$.
Dann definieren wir für eine einfache Funktion f

$$I(f) = \int_E f(x)\, M(dx) := \sum_{j=1}^{n} c_j M(A_j) \tag{3}$$

Wiederholung

Proposition:
Seien X_1, X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit
$X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$.
Dann gilt

$$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu) \text{ mit}$$

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \mu = \mu_1 + \mu_2$$

Wiederholung

Proposition:
Sei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstant.
Dann gilt

$$\begin{aligned} aX &\sim S_\alpha\left(|a|\,\sigma, \operatorname{sign}(a)\,\beta, a\mu\right), \text{falls } \alpha \neq 1 \\ aX &\sim S_\alpha\left(|a|\,\sigma, \operatorname{sign}(a)\,\beta, a\mu - \frac{2}{\pi} a\,(ln\,|a|)\,\sigma\beta\right), \text{falls } \alpha = 1 \end{aligned}$$

Sei M ein $\alpha-$ stabiles Zufallsmaß auf (E,ϵ) mit Kontrollmaß m und Schiefeintensität β.
Nach der Definition gilt für $\forall A \in \epsilon_0$

$$M(A) \sim S_\alpha \left((m(A))^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\int_A \beta(x)\, m(dx)}{m(A)}, 0 \right)$$

Weiter gilt, dass $M(A_i), M(A_j), i \neq j$, unabhängig sind.

$$I(f) := \sum_{j=1}^{n} c_j M(A_j) \sim ?$$

Sei f eine einfache Funktion

$$I\left(f\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j M\left(A_j\right)\sim S_\alpha\left(\sigma_f,\beta_f,\mu_f\right)\text{ mit}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_f &= \left(\int_E \left|f\left(x\right)\right|^\alpha m\left(dx\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} && (4)\\
\beta_f &= \frac{\int_E f\left(x\right)^{\langle\alpha\rangle}\beta\left(x\right)m\left(dx\right)}{\int_E \left|f\left(x\right)\right|^\alpha m\left(dx\right)} && (5)\\
\mu_f &= \begin{cases} 0 & if\,\alpha\neq 1\\ -\frac{2}{\pi}\int_E f\left(x\right)\beta\left(x\right)ln\left|f\left(x\right)\right|m\left(dx\right) & if\,\alpha=1\end{cases} && (6)
\end{aligned}$$

$I\left(f\right)$ ist linear in f.

allgemeine Funktion f

Sei $f \in F$ beliebig. Wähle eine Folge von einfachen Funktionen $\left\{ f^{(n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$, die die folgende Eigenschaften besitzt.

- $$f^{(n)}(x) \to f(x) \, \forall x \in E \tag{7}$$

- $$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq \vartheta(x), \forall n, x \, und \, \vartheta \in F \tag{8}$$

Existenz der Folge

Eine mögliche Wahl von $\left\{f^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{i}{n} & \textit{falls}\, \frac{i}{n}\leq f(x)<\frac{i+1}{n}, i=0,1,\ldots,n^2-1,\\ -\frac{i}{n} & \textit{falls}\, -\frac{(i+1)}{n}<f(x)\leq -\frac{i}{n}, i=0,1,\ldots,n^2-1,\\ 0 & \textit{falls}\, |f(x)|\geq n\end{cases}$$

In diesem Fall $\theta=|f|$

Ziel: Definiere

$$I\left(f\right) := lim_{n\to\infty} I\left(f^{(n)}\right)$$

z.z: $I\left(f^{(n)}\right)$ konvergiert stochastisch für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert

$$\iff \quad I\left(f^{(n)}\right) - I\left(f^{(m)}\right) \xrightarrow{\text{P}} 0,\ n, m \to \infty$$

Es gilt

$$I\left(f^{(n)}\right) - I\left(f^{(m)}\right) = I\left(f^{(n)} - f^{(m)}\right) \sim S_\alpha\left(\sigma_{n,m}, \beta_{n,m}, \mu_{n,m}\right)$$

$$I\left(f^{(n)}\right) - I\left(f^{(m)}\right) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$$

gilt, wenn

- $\sigma_{n,m} \to 0,\ n \to \infty$
- $\mu_{n,m} \to 0,\ n \to \infty$

Daraus folgt

$$plim_{n\to\infty} I\left(f^{(n)}\right) \text{ existiert}$$

Definiere

$$I\left(f\right) = plim_{n\to\infty} I\left(f^{(n)}\right)$$

$\forall f \in F$

Eindeutigkeit

Seien $\left\{f^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{g^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ zwei Folgen, die gegen f konvergieren und die Bedingungen (7) , (8) erfüllen.
Definiere

$$h^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(m)}(x), & \textit{falls } n = 2m \\ \\ g^{(m)}(x), & \textit{falls } n = 2m - 1 \end{cases}$$

Dies impliziert $\mathrm{I}\left(h^{(n)}\right) \xrightarrow{\mathrm{P}} I(f)$. Dann ergibt sich, dass die Definition des stabilen Integrals von der Wahl von $\left\{f^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nicht abhängt.

Inhalt

Proposition

Sei $f \in F$. Definiere σ_f, β_f, μ_f wie $(4), (5), (6)$. Dann

$$I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f)$$

d.h

1. Wenn $\alpha \neq 1$:

$$E[exp\{i\theta I(f)\}] =$$
$$exp\left\{-\int_E |\theta f(x)|^\alpha \left(1 - i\beta(x)\, sign(\theta f(x))\, tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) m(dx)\right\} \quad (9)$$

2. Wenn $\alpha = 1$:

$$E[exp\{i\theta I(f)\}] =$$
$$exp\left\{-\int_E |\theta f(x)| \left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x)\, sign(\theta f(x))\, ln|\theta f(x)|\right) m(dx)\right\}$$

Linearität

Behauptung:
$I(f)$ ist linear in f.d.h

- Seien $f, g \in F$

$$\Rightarrow I(f+g) = I(f) + I(g)$$

- Sei $f \in F, a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow I(af) = aI(f)$$

Äquivalenz

Aus der Linearität folgt

Propostion: Für $f_1, f_2, \ldots, f_d \in F$ hat die charakteristische Funktion des Zufallsvektors $\left(I\left(f_1\right), \ldots I\left(f_d\right)\right)$ die folgende Form

1. Falls $\alpha \neq 1$:

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}\left(\theta_1,\ldots,\theta_d\right) =$$
$$exp\left\{-\int_E\left|\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j\left(x\right)\right|^{\alpha}\left(1-i\beta\left(x\right)sign\left(\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j\left(x\right)\right)tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)m\left(dx\right)\right\}$$

2. Falls $\alpha = 1$:

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}\left(\theta_1,\ldots,\theta_d\right) =$$
$$exp\left\{-\int_E\left|\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j\left(x\right)\right|\left(1+i\frac{2}{\pi}\beta\left(x\right)sign\left(\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j\left(x\right)\right)ln\left|\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j\left(x\right)\right|\right)m\left(dx\right)\right\}$$

Der Zufallsvektor $(I(f_1), \ldots I(f_d))$ ist $\alpha-$stabil .

Außerdem ist diese konstruktive Definition äquivalent zu der vorherigen Definition.

Unabhängigkeit

Theorem
Seien $X_1 = \int_E f_1(x)\, M(dx)$ und $X_2 = \int_E f_2(x)\, M(dx)$ zwei stabile Integrale bezüglich eines $\alpha-$stabilen Zufallsmaßes M mit $0 < \alpha < 2$ und Kontrollmaß m.
Dann sind X_1 und X_2 genau dann unabhängig, wenn

$$f_1(x)\, f_2(x) \equiv 0 \text{ , m fast sicher}$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!