Prof. Dr. V. Schmidt | WS 2011/2012
G. Gaiselmann | 18.01.2012
O. Stenzel

Stochastik II
Übungsblatt 10

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 25.01.2012 vor den Übungen

Aufgabe 1

(a) Schreibe ein Programm zur Simulation eines Wiener–Prozesses im Intervall [0,1]. Verwende dabei den folgenden Ansatz zur Approximation von X_t: $\widetilde{X}_t^{(n)} = S_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\, Z_{\lfloor nt \rfloor + 1}/\sqrt{n}$ für $S_i = Z_1 + \ldots + Z_i$, wobei Z_j i.i.d Zufallsvariablen sind mit $P(Z_1 = 1) = P(Z_1 = -1) = 0.5$. (5)

(b) Bestimme aus 1000 Simulationen mit $n = 1000$ einen Schätzwert für den Erwartungswert und die Varianz des Maximums $M_1 = \max\limits_{0 \le t \le 1} X_t$. Werte dazu die Approximationen an den Stützstellen $t_k = k/m,\ k = 0, \ldots, m$ für $m = 1000$ aus. Vergleiche die Schätzwerte mit den theoretischen Größen. (3)

Aufgabe 2

Über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wiener-Prozess $\{X_t, t \ge 0\}$ gegeben. Für $t > 0$ (beliebig, aber fest) definieren wir

$$Z_n = \left(\sum_{i=1}^{2^n} \left(X_{it/2^n} - X_{(i-1)t/2^n} \right)^2 \right) - t\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathbb{E}\, Z_n = 0$ und $\mathbb{E}\, Z_n^2 = t^2 2^{-n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. (2)

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n = 0$ fast sicher. (2)

(c) Zeige mit Hilfe von Teilaussage (b), dass für jedes $t \ge 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} |X_{it/2^n} - X_{(i-1)t/2^n}| = \infty$$

Aufgabe 3
Seien $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor und $K = (k_{ij})$ eine symmetrische und positiv definite $n \times n$-Matrix. Man nennt den absolutstetigen Zufallsvektor $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)^\top$ (regulär) n-dimensional normalverteilt mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix K (Schreibweise: $Z \sim N(\mu, K)$), falls die gemeinsame Dichte gegeben ist durch

$$f(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-\mu)^\top K^{-1}(z-\mu)\right) \ \forall z \in \mathbb{R}^n \ .$$

Dann gilt $\mathbb{E}Z_i = \mu_i$ und $Cov(Z_i, Z_j) = k_{ij} \ \forall i, j = 1, \ldots, n$.
Die charakteristische Funktion von $Z \sim N(\mu, K)$ ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\exp(it^\top Z) = \exp(it^\top \mu - \frac{1}{2}t^\top K t) \ \forall t \in \mathbb{R}^n$$

(a) Zeige: Für $Z \sim N(o, K)$ und eine $m \times n$-Matrix A mit $rg(A) = m \leq n$ gilt $Y = AZ \sim N(o, AKA^\top)$ (3)

(b) Es sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Betrachte die folgenden Transformationen des Wiener–Prozesses:

- *Brownsche Brücke* $\{B_t, t \in [0,1]\}$ mit $B_t = X_t - tX_1$,
- *geometrische Brownsche Bewegung* $\{Y_t, t \geq 0\}$ mit $Y_t = e^{X_t}$,
- *Ornstein–Uhlenbeck–Prozess* $\{U_t, t \geq 0\}$ mit $U_t = e^{-t/2} X_{e^t}$.

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ auf einer beliebigen Indexmenge T wird Gauß-Prozess genannt, falls seine endlich-dimensionalen Verteilungen (mehrdimensionale) Normalverteilungen sind. Welche der Prozesse $\{B_t\}, \{Y_t\}$ bzw. $\{U_t\}$ sind Gauss-Prozesse? (4)

(c) Bestimme jeweils die zugehörige Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion für die Prozesse aus (b). (3)

Hinweis: Die charakteristische Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ einer (eindimensional) $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable ist gegeben durch $\varphi(s) = e^{is\mu} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$.