Prof. Dr. V. Schmidt
G. Gaiselmann
O. Stenzel

WS 2011/2012
01.02.2012

Stochastik II
Übungsblatt 12

Abgabe der Übungsblätter: Do. 09.02.2012 vor den Übungen

Aufgabe 1
Es seien S und T Stoppzeiten bzgl. einer Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

(a) Zeige, dass $\min\{S,T\}, \max\{S,T\}, S+T$ und $\alpha T, \alpha \geq 1$, Stoppzeiten sind. (5)

(b) Zeige, dass $S-T$ im allgmeinen keine Stoppzeit ist. (1)

Aufgabe 2
Für eine Stoppzeit τ definieren wir die gestoppte σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ wie folgt:

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für beliebige } t \geq 0\}.$$

Seien nun S und T Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Zeige:

(a) $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \ \forall A \in \mathcal{F}_S$ (3)

(b) $\mathcal{F}_{\min\{S,T\}} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ (3)

Aufgabe 3
Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Zeige, dass der Prozess $\{Y_t, t \geq 0\}$ mit $Y_t = (X_t - t\lambda)^2 - t\lambda$ ein Martingal ist. (4)

Aufgabe 4
Seien $\{X_t, t \geq 0\}, \{Y_t, t \geq 0\}$ Submartingale und $\{U_t, t \geq 0\}, \{V_t, t \geq 0\}$ Supermartingale über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Zeige: $\{\max\{X_t, Y_t\}, t \geq 0\}$ ist ein Submartingal und $\{\min\{U_t, V_t\}, t \geq 0\}$ ist ein Supermartingal. (4)