ulm university universität
uulm

Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. Gerd Gaiselmann
Dipl.-Math. Ole Stenzel

WS 2011/2012

Stochastik II - Übungsblatt 2

Abgabe der Übungsblätter: Mi 09.11.2011 vor der Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = (\{a, b, c\}, \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \mathsf{P})$, wobei $\mathsf{P}(\{a\}) = 0.5$ und $\mathsf{P}(\{b\}) = \mathsf{P}(\{c\}) = 0.25$. Außerdem sei X eine Zufallsvariable über diesem Wahrscheinlichkeitsraum mit $X(a) = 1$ und $X(b) = X(c) = 2$. Weiter seien die Sub-σ-Algebren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ von $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ gegeben durch $\mathcal{F}_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_2 := \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2)$ und $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Der Zufallsvektor $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sei absolutstetig mit der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ und den Randdichten $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ und $f_Y : \mathbb{R} \to [0, \infty]$.Außerdem sei $\mathbb{E}|X| < \infty$. Zeigen Sie, dass eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(X|Y)$ gegeben ist durch

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, Y(\omega))dx}{f_Y(Y(\omega))} 1\!\!\mathrm{I}\{f_Y(Y(\omega) > 0)\}.$$

Hinweis: Die Messbarkeit bzgl. $\sigma(Y)$ muss nicht gezeigt werden.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X, Y) ein absolutstetiger Zufallsvektor mit der gemeinsamen Dichte
$f_{(X,Y)}(x, y) = 2 1\!\!\mathrm{I}\{0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X|Y)$ und $\mathsf{P}(X \geq 0.5|Y)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Behauptung: Die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \geq 1$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$ erfüllt die Bedingungen des Theorems von Kolmogorov genau dann, wenn für alle $n \geq 2$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$ und für alle $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}}(s_1, \ldots, s_n) = \varphi_{\mathsf{P}_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}}(s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)})$ für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$.

(b) $\varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}}(s_1, \ldots, s_{n-1}) = \varphi_{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}}(s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)$.

Hinweis: $\varphi(\cdot)$ bezeichnet die charakteristische Funktion des jeweiligen Maßes. $\mathcal{S}_n$ bezeichnet die Gruppe aller Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel eines stochastischen Prozesses an, dessen endlich-dimensionale Verteilungen multivariat normalverteilt sind.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ an, welche nicht die Bedingungen des Theorems von Kolmogorov erfüllt.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Beweisen Sie: Ein (reellwertiger) stochastischer Prozess $X = \{X(t),\, t \in [0, \infty)\}$ mit unabhängigen Zuwächsen hat bereits dann stationäre Zuwächse, wenn für jedes $t > 0$ die Verteilung der Zufallsvariablen $X(t + h) - X(h)$ unabhängig von $h \geq 0$ ist.