Prof. Dr. V. Schmidt
G. Gaiselmann
O. Stenzel

WS 2011/2012
30.11.2011

Stochastik II
Übungsblatt 5

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 07.12.2011 vor den Übungen

Definition

Der stochastische Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ mit $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ heißt zusammengesetzter Poisson-Prozess mit den Charakteristiken (λ, F_U), wobei F_U die Verteilungsfunktion der Sprunghöhen $U_1, U_2, \ldots$ und $\{N_t, t \geq 0\}$ einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität λ bezeichnet.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $\{X_t, t > 0\}$ mit $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$.
Sei $\hat{g}_{N_t}(s) = \mathbb{E}(s^{N_t}), s \in (0,1)$, die erzeugende Funktion von N_t, $\hat{l}_U(s) = \mathbb{E}(e^{-sU})$ die Laplace-Transformierte von $U_i \geq 0$ für beliebige i und $\hat{l}_{X_t}(s)$ die Laplace-Transformierte von X_t. Zeige:

$$\hat{l}_{X_t}(s) = \hat{g}_{N_t}(\hat{l}_U(s)), s \geq 0.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $\{X_t, t > 0\}$ mit $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ so dass $U_i \sim Exp(\gamma)$ für beliebige i, wobei die Intensität von $\{N_t\}$ durch λ gegeben sei. Zeige, dass für die Laplace-Transformierte $\hat{l}_{X_t}(s)$ von X_t gilt:

$$\hat{l}_{X_t}(s) = \exp\left(-\frac{\lambda t s}{\gamma + s}\right), \ \forall s > 0.$$

Aufgabe 3 (3 + 2 + 4 + 1 Punkte)

(a) Sei $\lambda > 0$ und $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und auf dem Intervall $(0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass die Zufallsvariablen $\frac{-\log U_1}{\lambda}, \frac{-\log U_2}{\lambda}, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt sind mit Parameter λ. (2)

(b) Formuliere einen Algorithmus zur Simulation einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit Parameter λ. (2)

(c) Schreibe ein Programm, dem als Parameter eine Intervallobergrenze t und eine Intensität λ übergeben werden und das für eine Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ alle Erneuerungszeitpunkte im dem Intervall $[0, t]$ sowie zusätzlich die zugehörige erwartete Anzahl von Erneuerungszeitpunkten ausgibt. (5)

(d) Schreibe eine zusätzliche Prozedur, welche die mittlere Anzahl von Erneuerungszeitpunkten im Intervall $[0, 100]$ für $\lambda = 0.2$ bei 1000 Durchläufen ausgibt. (1)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Schreibe ein Programm, dem als Parameter ein Zeitpunkt t, eine Intensität λ und ein Wert γ übergeben werden und das als Ergebnis den zufälligen Wert eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit Charakteristiken $(\lambda, Exp(\gamma))$ zum Zeitpunkt t ausgibt. Schätze den Erwartungswert von X_1 für $\lambda = 0.2$ und $\gamma = 0.5$ aus 10000 Realisierungen. (3)

Bitte für diese und alle zukünftigen Programmieraufgaben folgendes beachten: Abzugeben ist ein Ausdruck des lesbar kommentierten Programmcodes *und* der (ggf. beispielhaften) Ausgaben. Bevorzugt werden Programme in Java. Lösungen in anderen gebräuchlichen Programmiersprachen werden auch akzeptiert, **wenn sie kommentiert, strukturiert und lesbar sind.**