Prof. Dr. V. Schmidt
G. Gaiselmann
O. Stenzel

WS 2011/2012
07.12.2011

Stochastik II
Übungsblatt 6

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 14.12.2011 vor den Übungen

Aufgabe 1

Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})$, wobei $p_{12} = p_{23} = p_{31} = 1$ gelte. Die Anfangsverteilung sei durch $\alpha = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ gegeben.

(a) Zeige, dass die Folge $Y_n = 1 - 1\!\!1(X_n = 1)$ keine Markov-Kette beschreibt. (2)

(b) Sei $Y_n = X_{2n}, n \geq 0$. Zeige, dass die Folge $\{Y_n\}$ eine Markov-Kette ist und bestimme die zugehörige Übergangsmatrix. (3)

Aufgabe 2

Zeige, dass ein stochastischer Prozess $\{X_t : t \geq 0\}$ mit Werten in einem höchstens abzählbar unendlichen Zustandsraum E genau dann ein Markov-Prozess ist, wenn es eine Übergangsfunktion $\{P(h)\}_{h\geq 0}$ gibt, so dass für alle $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ und $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0) \\
&= p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1}) = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}).
\end{aligned}
$$

(5)

Aufgabe 3

In Ulm sei das Wetter entweder sonnig, neblig oder regnerisch. Das Wetter dort werde modelliert durch eine Markov-Kette mit den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten:

		morgen wird es...		
		sonnig	neblig	regnerisch
heute ist es...	sonnig	0.8	0.2	0.0
	neblig	0.4	0.4	0.2
	regnerisch	0.2	0.6	0.2

Angenommen, der 10. Mai sei sonnig. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Wetterzustände sonnig, neblig und regnerisch am 2. September. Hinweis: Zur Berechnung von Matrixpotenzen darf hier `R`, `Maple`, o.ä. verwendet werden. (5)

Aufgabe 4

Seien $E = \{1, ..., \ell\}$ ein endlicher Zustandsraum, D ein beliebiger messbarer Raum, $Z_1, Z_2, \ldots : \Omega \to D$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, und die Zufallsvariable $X_0 : \Omega \to E$ sei unabhängig von $Z_1, Z_2, \ldots$. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to E$ seien durch die Rekursionsgleichung $X_n = \varphi(X_{n-1}, Z_n)$ gegeben, wobei $\varphi : E \times D \to E$ eine beliebige messbare Abbildung sei. Zeige: $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ist eine Markov-Kette. (4)