Prof. Dr. V. Schmidt
G. Gaiselmann
O. Stenzel

WS 2011/2012
21.12.2011

Stochastik II
Übungsblatt 8

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 11.01.2012 vor den Übungen

Aufgabe 1

Es seien $\{X_t, t \geq 0\}$ und $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$ unabhängige Wiener-Prozesse. Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\{Y_t, t \geq 0\}$ mit $Y_t = aX_t + b\tilde{X}_t$ ein Wiener-Prozess? (3)

Aufgabe 2

Ein Sensor zur Messung hoher Temperaturen zeigt im Mittel die wahre Temperatur an. Im Laufe der Nutzungsdauer verschlechtert sich jedoch die Anzeigegenauigkeit. Es sei Y_t die zufällige Abweichung der zum Zeitpunkt t angezeigten Temperatur von der tatsächlichen Temperatur. Untersuchungen haben gezeigt, dass $\{Y_t/\sqrt{\sigma^2}, t \geq 0\}$ durch einen Wiener-Prozess beschrieben wird, wobei $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y_1) = 0.01$ zu setzen ist.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Sensor zuerst $5°C$ zuviel anzeigt, bevor er $10°C$ zuwenig anzeigt.

Hinweis: Verwende $\mathbb{E}(Y_{T_{a,b}}) = 0$ ohne Beweis, wobei $T_{a,b} = \min\{T_a, T_b\}$ für $T_x = \inf\{t \geq 0 : Y_t = x\}, x \in \mathbb{R}$ und $a < b$. (3)

(b) Nach welcher Zeit verlässt $\{Y_t\}$ im Mittel den Toleranzbereich $[-5°C, 5°C]$?

Hinweis: Verwende die Identität $\mathbb{E}(T_{a,b}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}(Y^2_{T_{a,b}})$ ohne Beweis. (3)

Aufgabe 3

Es seien $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess, $M_t = \max\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ für jedes $t \geq 0$, $a > 0$ und $T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$. Man kann zeigen, dass der Prozess $\{X^*_t, t \geq 0\}$ mit $X^*_t = X_t \mathbb{I}(t \leq T_a) + (2a - X_t)\mathbb{I}(t > T_a),\ t \geq 0$ wiederum ein Wiener-Prozess ist.

(a) Zeige, dass für alle $a > 0, y \geq 0$ gilt: (3)

$$P(X_t \leq a - y, M_t \geq a) = P(X_t > a + y).$$

(b) Zeige, dass für alle $a \geq 0$ gilt: $P(M_t \geq a) = 2P(X_t \geq a)$. (2)

(c) Bestimme die Dichten von $T_a, a > 0$ und $M_t, t > 0$. (4)