Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
22.12.2011

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 10

(Abgabe: Donnerstag, 12.01.2012, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 4 Punkte

Bei einer Folge von Würfen mit einem fairen Würfel beschreibe Y_n die nach dem n-ten Wurf erreichte durchschnittliche Punktzahl.

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Gebe eine "‘vernünftige"’ obere Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit $P(|Y_n - (7/2)| \geq \varepsilon)$ an.

(b) Wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass die Durchschnittspunktzahl nach 100 Würfen nicht im Intervall $(3, 4)$ liegt?

Aufgabe 2, 5 Punkte

Es seien $a_1, ..., a_n$ positive Zahlen. Beweise mittels der Jensen'schen Ungleichung, dass $a_H \leq a_G \leq a_A$ gilt, wobei

(a) $a_A = 1/n(a_1 + ... + a_n)$ das arithmetische Mittel,

(b) $a_G = (a_1 \cdot ... \cdot a_n)^{1/n}$ das geometrische Mittel und

(c) $a_H = \dfrac{1}{(1/n)(1/a_1 + ... + 1/a_n)}$ das harmonische Mittel bezeichne.

Aufgabe 3, 4 Punkte

(a) Zeige, dass die Zufallsvariablen mit endlicher Varianz einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden.

(b) Seien X, Y Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0, Varianz 1 und Kovarianz c. Zeige folgende Ungleichung:

$$E[max\left\{X^2, Y^2\right\}] \leq 1 + (1 - c^2)^{1/2}$$

Aufgabe 4, 3 Punkte

Berechne die charakteristische Funktionen von $X \sim Bin(n, p)$, wobei $p \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$, sowie von $Y \sim U([a, b])$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Aufgabe 5, 4 Punkte

(a) Berechne die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} (1 - |x|) & \text{, falls } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(b) Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ besitze die charakteristische Funktion

$$\phi_X(t_1, t_2) = exp(-2t_1^2 - 2t_1t_2 - t_2^2)$$

Bestimme die charakteristische Funktion von $X_1 + X_2 + 1$.
Welche Verteilung hat $X_1 + X_2 + 1$?
Hinweis: Die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen bestimmt ihre Verteilung eindeutig.