Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
12.01.2012

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 11

(Abgabe: Donnerstag, 19.01.2012, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 4 Punkte

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable mit $P(X = n) = \frac{2}{3^n}$, $n \geq 1$.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$.
- Bestimme die momenterzeugende Funktion $M_X(s) = E[e^{sX}]$, $s \in \mathbb{R}$.
- Ermittle $E[X]$ und $Var(X)$.

Aufgabe 2, 6 Punkte

- Berechne die erzeugenden Funktion der geometrischen Verteilung, $X \sim Geo(p)$, $p \in (0,1)$, wobei $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Bestimme mit Hilfe der erzeugenden Funktion den Erwartungswert und die Varianz dieser Verteilung.
- Berechne die erzeugenden Funktion der negativen Binomialverteilung, $X \sim NB(r,p)$, $p \in (0,1)$, $r > 0$, wobei $P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bestimme mit Hilfe der erzeugenden Funktion den Erwartungswert und die Varianz dieser Verteilung.

Aufgabe 3, 6 Punkte

Zeige mit Hilfe der charakteristischen Funktion folgende Aussagen:

- Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim Bin(1,p)$, $i = 1, ..., n$, dann gilt: $X_1 + ... + X_n \sim Bin(n,p)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$.
- Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim Poi(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., n$, dann gilt: $X_1 + ... + X_n \sim Poi(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$.
- Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, ..., n$, dann gilt: $X_1 + ... + X_n \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4, 8 Punkte

Überprüfe, ob die folgenden Funktionen charakteristisch sind.

- $f(t) = \begin{cases} (1 - |t|) & \text{, falls } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$
- $f(t) = \frac{1}{1+t}$, $t \in \mathbb{R}$
- $f(t) = cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $f(t) = exp(-t^3)$, $t \in \mathbb{R}$