Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
19.01.2012

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 12

(Abgabe: Donnerstag, 26.01.2012, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 4 Punkte

Sei $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen. Zeige, falls $E[X_1] = 0$ und $E[X_1^4] < \infty$ gilt, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}\, log(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} 0.$$

Hinweis: Zeige zuerst, dass in diesem Fall

$$E[\sum_{k=1}^{n} X_k]^4 = E[n\ X_1^4] + 3\ n\ (n-1)\ E[X_1^2 X_2^2]$$

Aufgabe 2, 8 Punkte

Zeige folgende Konvergenzaussagen.

(a) Sei $X_n \sim Exp(n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen. Zeige, dass diese Folge im quadratischen Mittel und fast sicher gegen 0 konvergiert.

(b) Sei X_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von $Poi(1/n)$-verteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass die Folge X_n, $n \in \mathbb{N}$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert.

(c) Sei X_n, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von unabhängigen und identisch $U(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen und sei $Y_n = n\ min\{X_1, ..., X_n\}$ für jedes $n \geq 1$. Zeige, dass dann $Y_n \xrightarrow{d} Z$, mit $Z \sim Exp(1)$.

Aufgabe 3, 8 Punkte

Zeige folgende Konvergenzaussagen.

(a) Sei $\{Y_n\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E|Y_1| < \infty$ und sei $X_n = 1/n\ Y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ für $n \to \infty$.

(b) Sei $\{X_n\}$ eine monoton wachsende Folge von Zufallsvariablen. Zeige, dass die Folge fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, falls $X_n \xrightarrow{P} X$, für $n \to \infty$.

(c) Sei $\{X_n\}$ eine Folge von unabhängigen und $U(0,\theta)$-identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\theta > 0$. Zeige, dass $max\{X_1, ..., X_n\} \xrightarrow{fs} \theta$ und $max\{X_1, ..., X_n\} \xrightarrow{L^1} \theta$, für $n \to \infty$.

Aufgabe 4, 3 Punkte

Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ sei X_n gleichverteilt auf der Menge $\{0, 1/n, ..., (n-1)/n, 1\}$, dh.

$$P(X_n = k/n) = 1/(n+1),\ k = 0, ..., n.$$

Sei U eine auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte stetige Zufallsvariable. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{d} U$, für $n \to \infty$.