Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
26.01.2012

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 13

(Abgabe: Donnerstag, 02.02.2012, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 4 Punkte

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsgrößen für $n \in \mathbb{N}$ mit $E[X_1] = E[X_1]^3 = 0$. Zeige, dass der sogenannte Stichprobenmittelwert $\overline{X_n} = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$ und die sogenannte Stichprobenvarianz $S_n^2 = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2$ unkorreliert sind.

Aufgabe 2, 4 Punkte

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$.

(a) Zeige, dass $\overline{X_n} \xrightarrow{fs} \mu$, für $n \to \infty$.

(b) Zeige, dass $S_n^2 \xrightarrow{fs} \sigma^2$, für $n \to \infty$.

Aufgabe 3, 4 Punkte

Sei $\{X_n, n \geq 2\}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2\, n\, log(n)}$$
$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\, log(n)}$$

Genügt die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen nach Markow?

Aufgabe 4, 4 Punkte

Sei $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E[X_1] = \mu$, $Var(X_1) = \sigma^2$. Zeige, falls X_j unabhängig von X_{j-i}, X_{j+i}, $\forall i \geq 2$ ist, dass

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{d} \mu.$$

Aufgabe 5, 4 Punkte

Der Fehler, der beim Runden einer Dezimalzahl auf die zweite Nachkommastelle entsteht, sei gleichverteilt im Intervall $(-0.05, 0.05)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Betrag der Summe von 1000 Rundungsfehlern kleiner als 2?