Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
02.02.2012

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 14

(Abgabe: Donnerstag, 09.02.2012, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 5 Punkte

Sei $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_n \sim U[0,1]$ und $X \sim U[0,1]$ unabhängig von der Folge $\{X_n\}$. Ferner sei $Z = -log(X)$ und $Y_n = n\,(1 - max\,\{X_1, ..., X_n\})$, $\forall n \geq 1$.

(a) Berechne die Verteilungsfunktionen von Y_n, $n \geq 1$ und Z.

(b) Zeige, dass $Y_n \xrightarrow{d} Z$.

Aufgabe 2, 5 Punkte

Der durchschnittliche Natriumgehalt eines bestimmten Mineralwassers soll geschätzt werden. Dazu werden $n \in \mathbb{N}$ Flaschen zufällig ausgewählt und deren Natriumwerte X_i, $i = 1, ..., n$ gemessen, wobei $X_1, ..., X_n$ unabhängig und identisch verteilt seien mit $EX_i = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Wieviele Messungen sind mindestens notwendig, damit die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{X_n} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i$ vom wahren Durchschnittswert μ um weniger als $0,1\sigma$ abweicht, mindestens 0,95 beträgt? Beantworte die Frage mit Hilfe

(a) der Tschebyscheff-Ungleichung

(b) des zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 3, 5 Punkte

Gegeben sei die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_n \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, und sei $\overline{X_n} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeige, dass

$$\frac{X_1 + ... + X_n - (n/\lambda)}{\sqrt{n\,\overline{X_n}^2}} \xrightarrow{d} X \sim N(0,1).$$

Aufgabe 4, 5 Punkte

Sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge von unabhängigen und identisch Exponential-verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert 1. Beweise mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{f.s.} 0, \text{ für } n \to \infty.$$