Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
09.02.2012

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 15

(Besprechung: Donnerstag, 16.02.2012)

Aufgabe 1

Multiple choice: Überprüfe welche Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, dann gilt:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{F}$

b) $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A)$, $\forall A, B \in \mathcal{F}$

c) Ist $A \neq \emptyset$ und $B \subset A \subset C$ mit $C \in \mathcal{F}$, so gilt $P(A|B \cap C) = 1$

(b) Sei $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Zufallsvariablen, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergiert. Dann ...

a) ... konvergiert $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, fast sicher gegen X.

b) ... konvergiert $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, in Verteilung gegen X.

c) ... konvergiert $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, im quadratischen Mittel gegen X.

(c) Die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen bestimmt ihre Verteilung eindeutig.

(d) Sei $\{B_n\}$ eine endliche oder abzählbare Folge von Ereignissen aus $\mathcal{F}$. Sie heißt messbare Zerlegung von Ω, falls B_n paarweise disjunkt $\forall n$ und $\cup_n B_n = \Omega$.

Aufgabe 2

Die Sekretärin von Herrn Müller soll n, $n \in \mathbb{N}$, unterschiedliche Briefe an n verschiedene Geschäftspartner verschicken. Da sie heute etwas zerstreut ist, steckt sie die Briefe rein zufällig in n verschieden adressierte Kuverts (aber so, dass jedes Kuvert nur einen Brief enthält). Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich mindestens ein Brief im richtigen Kuvert?
Hinweis: Siebformel

Aufgabe 3

Sei $X \sim N(0, 1)$ und $Y \sim U(-1, 2)$. Ferner seien X und Y unabhängig. Berechne die Dichte von X/Y.

Aufgabe 4

Es sei f eine durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < 0 \\ c\, x^2\, (2 - x) & \text{, falls } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

gegebene Funktion.

(a) Bestimme den Parameter c so, dass f die Dichte einer stetigen Zufallsvariable ist.

(b) Bestimme die Verteilungsfunktion F_X von X.

(c) Ermittle die Verteilungsfunktion und die Dichte von $Y = 2X - 1$, sowie von $Z = X^2$.

(d) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von Y und Z.

Aufgabe 5

Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit der Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & , \text{falls } 1 \leq x \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass die Randdichten von X und Y gegeben sind durch

- $f_X(x) = (4 - 2x)\mathbb{1}(1 \leq x \leq 2)$
- $f_Y(y) = (2y - 2)\mathbb{1}(1 \leq y \leq 2)$.

(b) Bestimme $E[X]$, $E[Y]$ und $Cov(X, Y)$.

(c) Sind X und Y stochastisch unabhänigig?

Aufgabe 6

Ein fairer Würfel wird n mal geworfen. Sei $\overline{X_n} = S_n/n$, wobei S_n die Anzahl der geworfenen Augenzahlen kleiner als 3 angibt. Der Würfel soll mindestens so oft geworfen werden, dass mit einer approximativen Sicherheit von mindestens 95% die Zufallsvariable $\overline{X_n}$ um weniger als 0,02 von $1/3$ abweicht.

(a) Wie viele Würfe wären nach der Tschebyscheff-Ungleichung erforderlich?

(b) Wie groß muss n nach dem zentralen Grenzwertsatz gewählt werden?