

## Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

### Blatt 4

(Abgabe: Donnerstag, 17.11.2011, vor den Übungen)

#### Aufgabe 1, 5 Punkte

Ein fairer Würfel werde 2 mal geworfen. Definiere die folgenden Ereignisse:

A: "Die erste Augenzahl ist ungerade"

B: "Die zweite Augenzahl ist ungerade"

C: "Die Summe der Augenzahlen ist ungerade"

- (a) Zeige, dass  $A$ ,  $B$  und  $C$  paarweise unabhängig sind, aber insgesamt nicht unabhängig.
- (b) Zeige, dass  $A \cup B$  und  $C$  abhängig sind.

#### Aufgabe 2, 6 Punkte

Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B, B_1$  und  $B_2 \in \mathcal{F}$ . Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

- (a) Es sei  $0 < P(A) < 1$ . Dann gilt  
$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B|A^c).$$
- (b) Es gibt Ereignisse  $A$  und  $B$  mit  
 $0 < P(B) < 1$ ,  $P(A|B) = P(A)$  und  $P(A \cup B) = P(A \cap B)$ .
- (c) Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  sind genau dann unabhängig, wenn  $A^c$  und  $B$  unabhängig sind.
- (d) Das Ereignis  $A$  sei unabhängig von den Ereignissen  $B_1$  und  $B_2$ . Weiter gelte  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Dann gilt, dass  $A$  und  $B_1 \cup B_2$  unabhängig sind.

#### Aufgabe 3, 3 Punkte

In einer Wand befindet sich ein äußerlich nicht sichtbares Drahtgeflecht aus 4 mm starkem Draht, das Rechtecke mit den Seitenlängen 50 mm und 80 mm (gemessen von Drahtmitte zu Drahtmitte) bildet. An einer rein zufällig ausgewählten Stelle wird mit einem Bohrer ein Loch mit 10 mm Durchmesser in die Wand gebohrt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei das Drahtgeflecht getroffen?

#### Aufgabe 4, 7 Punkte

- (a) Die Professoren Kalteisen, Halbherz und Ruhbach teilten sich die vierwöchige Prüfungszeit, 5 Tage Kalteisen, 7 Tage Halbherz und 8 Tage Ruhbach. Die langjährigen Durchfallquoten sind bei Kalteisen  $1/2$ , bei Halbherz  $1/3$  und bei Ruhbach  $1/4$ . Wer an welchen Tagen prüfte ist nicht bekannt. Am 1. August bestanden zwei der drei Kandidaten des Tages. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Halbherz geprüft?
- (b) Auf einem Tisch stehen drei Urnen. In der ersten Urne sind eine weiße und neun schwarze Kugeln enthalten, in der zweiten sind eine schwarze und fünf weiße Kugeln. Die dritte

Urne ist leer. Aus jeder der ersten beiden Urnen wird eine Kugel zufällig entnommen. Die verbleibenden Kugeln werden in die dritte Urne gelegt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus der dritten Urne zufällig ausgewählte Kugel weiß ist.

### **Aufgabe 5, 4 Punkte**

Bei der Glücksspirale der Olympialotterie 1971 wurden die 7-ziffrigen Gewinnzahlen auf folgende Art ermittelt. Aus einer Trommel mit insgesamt 70 Kugeln, welche je 7 gleichartige Kugeln mit den Ziffern 0 bis 9 enthielt, wurden nach Durchmischen 7 Kugeln gleichzeitig entnommen und deren Ziffern zufällig zu einer Zahl angeordnet. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: "Alle Ziffern sind gleich" B: "Alle Ziffern sind verschieden" C: "Die Zahl enthält genau 2 gleiche Ziffern."