

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 5

(Abgabe: Donnerstag, 24.11.2011, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 5 Punkte

Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit Parameter p , $0 < p < 1$.

- (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq k)$, $k \in \mathbb{N}$
- (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X - n \geq k | X > n)$, $k, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2, 4 Punkte

Die Zufallsvariable X habe eine Wahrscheinlichkeitsfunktion p_x der folgenden Form, wobei k eine gewisse Zahl sei,

$$p_x = P(X = x) = \begin{cases} k, & \text{falls } x = 0 \\ 2k, & \text{falls } x = 1 \\ 3k, & \text{falls } x = 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimme den Wert k .
- (b) Bestimme $P(X < 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(0 < X < 2)$.
- (c) Welches ist der kleinste Wert von x , für den $P(X \leq x) > 0,5$?
- (d) Bestimme die Verteilungsfunktion F von X und zeichne diese.

Aufgabe 3, 5 Punkte

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < -1 \\ 1/4, & \text{falls } -1 \leq x < 1 \\ 1/2, & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 2/3, & \text{falls } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{falls } x \geq 3 \end{cases}$$

- (a) Zeichne den Graphen für F .
- (b) Bestimme $P(-1 < X \leq 2)$, $P(-1 \leq X < 2)$, $P(-1 \leq X \leq 2)$, $P(1,5 < X < 2,7)$.
- (c) Ermittle die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X .

Aufgabe 4, 3 Punkte

Aus einem Bridge-Spiel (52 Karten) wird eine Handkarte (13 Karten) gezogen. X bezeichne die Anzahl der Pik-Karten auf der Hand. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X .

Aufgabe 5, 4 Punkte

Ein zufälliger Punkt der Ebene ist durch seine kartesischen Koordinaten (X, Y) gegeben. Die bivariate Verteilung der Koordinaten hat die Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} C(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & \text{falls } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die auf dem Kreis mit Radius R konzentriert ist. Bestimme

- (a) den Wert der Konstanten C und
- (b) die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällige Punkt (X, Y) in einem Kreis mit Radius 1 liegt, falls $R = 2$.

Aufgabe 6, 4 Punkte

Eine Maschine produziert Stahlstifte mit einer Soll-Länge von 35 mm. Da zufallsabhängige Ungenauigkeiten in der Herstellung nicht ausgeschlossen werden können, lässt sich die Länge X eines produzierten Stahlstiftes als Zufallsvariable ansehen, und zwar sei X gemäß $N(35, 0.5)$ (Normalverteilung) verteilt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der laufenden Produktion entnommener Stift

- (a) höchstens 35,4 mm lang ist.
- (b) mindestens 34,6 mm lang ist.
- (c) zwischen 34,5 mm und 35,2 mm mißt.
- (d) um maximal 0,7 mm von der Soll-Länge abweicht.