Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
24.11.2011

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 01.12.2011, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 6 Punkte

(a) Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X bezeichne das Minimum der beiden erhaltenen Augenzahlen. Bestimme die Zähldichte von X.

(b) Ein Paar fairer Würfel wird 36 mal geworfen. Sei X die Anzahl der erhaltenen Doppel-Sechsen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X die Werte 1, 3 und 6 an? Welche Werte liefert die Approximation durch eine Poisson-Verteilung im Sinne des Gesetzes der seltenen Ereignisse? Versuche eine Aussage über die Qualität der Approximation zu machen.

Aufgabe 2, 3 Punkte

Sei $X = (X_1, ..., X_k) \sim \text{Polynom}(n, p_1, ..., p_k)$. Zeige, dass die Randverteilung $X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$.
Hinweis: Multinomialtheorem kann ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 3, 6 Punkte

Der Zufallsvektor (X, Y) besitze folgende Verteilung

$\frac{Y}{X}$	-1	0	1
-1	$2/5$	0	$1/10$
0	0	$1/5$	0
1	$1/10$	0	$1/5$

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und von Y.

(b) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

(c) Berechne $P(X - Y = 1)$, $P(XY = 1)$ und $P(X \leq 0 | Y = 0)$.

Aufgabe 4, 4 Punkte

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein absolut-stetiger Zufallsvektor mit der Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_1 + 2/3x_2 & \text{, falls } x_1 \in [-0.5, 0.5] \text{ und } x_2 \in [3, \sqrt{12}] \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Randdichten von X_1 und X_2.

(b) Bestimme die bedingte Dichte $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$.

(c) Überprüfe, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

Hinweis: Die bedingte Dichte ist definiert durch:
$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Aufgabe 5, 6 Punkte

(a) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim Exp(\lambda)$. Zeige, dass die Zufallsvariable $X_1 + ... + X_n$ Erlang-verteilt ist mit den Parametern n und λ.
Hinweis: Dichte der Erlangverteilung

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} exp(-\lambda x), \text{ falls } x > 0 \text{ und } 0 \text{ sonst.}$$

(b) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim Poi(\lambda_i)$, $i = 1, ..., n$. Zeige, dass die Zufallsvariable $X_1 + ... + X_n$ Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.