Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

WS 2011/2012
01.12.2011

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 08.12.2011, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 6 Punkte

Seien $X_1 \sim \text{Geo}(p_1)$ und $X_2 \sim \text{Geo}(p_2)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $p_1, p_2 \in [0,1]$ mit $p_1 \neq p_2$. Somit gilt $P(X_i = k) = p_i(1-p_i)^{k-1}$, für $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

(a) Zeige, dass $P(X_1 + X_2 = n) = \dfrac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}((1-p_2)^{n-1} - (1-p_1)^{n-1})\ \forall n \geq 2$.

(b) Berechne $P(min(X_1, X_2) \geq n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Berechne $P(min(X_1, X_2) = n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2, 4 Punkte

Die Dichte der χ^2- Verteilung mit n Freiheitsgraden ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{(n/2)-1} exp(-x/2) \mathbb{1}(0,\infty)(x),\ n \in \mathbb{N}$$

X_1 und X_2 seien zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \chi^2_n$ und $X_2 \sim \chi^2_m$, $m, n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{n+m}$.

Aufgabe 3, 3 Punkte

Seien X_1, $X_2 \sim N(0,1)$ und unabhängig. Zeige, dass $f_{X_1/X_2}(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, also der Dichte der Cauchy-Verteilung entspricht.

Aufgabe 4, 4 Punkte

Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+1/2)(y+1/2) & \text{, falls } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Dichte von $X \cdot Y$.

(b) Bestimme die Dichte von X/Y.

Aufgabe 5, 8 Punkte

Sei $X \sim N(0,1)$ und U eine auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable.

(a) Bestimme die Dichte von $A = exp(X)$.

(b) Bestimme die Dichte von $B = 1/X^2$.

(c) Bestimme die Dichte von $C = U^2$.

(d) Bestimme die Dichte von $D = -(1/\lambda)log(U)$, für $\lambda > 0$.