Prof. Dr. E. Spodarev
Dipl.-Math. oec. J. Schmidt

Wintersemester 2011/2012
8.12.2011

Übungen zu elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Blatt 8

(Abgabe: Donnerstag, 15.12.2011, vor den Übungen)

Aufgabe 1, 4 Punkte
Die absolutstetige Zufallsvariable X beschreibe die zufällige Dauer eines Telefongespräches. Die Dichte von X sei gegeben durch

$$f_X(x) = \frac{1}{16} x e^{-\frac{1}{4}x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Eine Telefongesellschaft berechnet für Gespräche bis zu 5 Minuten einen Festpreis von 0.20 €, danach steigt der Preis linear zu der Gesprächsdauer mit einem Faktor von 0.03 €/min. Die Zufallsvariable $K = k(X)$ gebe die Kosten eines Telefonanrufes der Länge X an. Berechne den Erwartungswert von K und K^2.

Aufgabe 2, 6 Punkte
Bestimme den Erwartungswert der Zufallsvariable X, falls

(a) $X \sim \text{Geo}(p)$, $0 < p < 1$,

(b) X die Dichte

$$f_X(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

besitzt, wobei $b, p > 0$ und Γ die Gammafunktion bezeichnet.

(c) X die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda x}} e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2} \mathbb{1}_{\{x > 0\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

besitzt, wobei $\lambda > 0$ ist.

Aufgabe 3, 5 Punkte
Aus einem Stapel Skat-Karten (32 Karten) werden so lange nacheinander Karten ohne Zurücklegen gezogen, bis sich keines der 4 Asse mehr im Stapel befindet. Wie groß ist die mittlere Anzahl gezogener Karten?

Aufgabe 4, 3 Punkte
Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Zeige, dass

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}((X-a)^2) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2).$$