

---

# Stochastische Netzwerke

insbesondere zufällige geometrische Graphen und zufällige  
Mosaik

---

Universität Ulm  
Institut für Stochastik

Vorlesungsskript  
Prof. Dr. Volker Schmidt  
Stand: Sommersemester 2012

ULM, IM JUNI 2012

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Zufällige Graphen mit deterministischen Eckpunkten</b>	<b>5</b>
2.1	Grundbegriffe und elementare Eigenschaften . . . . .	6
2.1.1	Konstruktion von geeigneten Wahrscheinlichkeitsräumen; Kopplungstheorem	6
2.1.2	Monotone Klassen; 0–1–Gesetz von Kolmogorow . . . . .	8
2.1.3	Existenz unendlicher Cluster; Perkulationswahrscheinlichkeiten . . . . .	11
2.2	Beispiele . . . . .	13
2.2.1	$k$ –reguläre Bäume . . . . .	13
2.2.2	Graphen in $\mathbb{R}^2$ mit konvexen polygonalen Zellen; duale Graphen . . . . .	15
2.2.3	Kubische Gitter in $\mathbb{R}^d$ . . . . .	19
2.3	Bond–Perkolation vs. Site–Perkolation . . . . .	21
2.4	Bond–Perkolation in $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	25
2.4.1	Korrelationsungleichung . . . . .	25
2.4.2	Abschätzung von Perkulationswahrscheinlichkeiten in Rechtecken . . . . .	28
2.4.3	Untere Schranke für die kritische Auswahlwahrscheinlichkeit $p_c$ . . . . .	36
2.4.4	Fundamentalsatz über Pivotvariablen für up–sets . . . . .	38
2.4.5	Obere Schranke für die kritische Auswahlwahrscheinlichkeit $p_c$ . . . . .	40
2.5	Bestimmung der kritischen Auswahlwahrscheinlichkeit $p_{ec}$ in $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	45
2.5.1	Zusammenhängende Graphen mit beschränktem Knotengrad . . . . .	45
2.5.2	$m$ –abhängige Site–Konfigurationen . . . . .	46
2.5.3	Exponentiell beschränkte Bond–Cluster in $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Poissonsche Eckpunktsysteme in <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>51</b>
3.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .	51
3.1.1	Existenz und Eindeutigkeit von zufälligen Zählmaßen . . . . .	51
3.1.2	Poisson–Prozesse als zufällige Zählmaße . . . . .	53
3.1.3	Summation und Einschränkung von Poisson–Prozessen . . . . .	56
3.1.4	Simulationsalgorithmus; Akzeptanz– und Verwerfungsmethode . . . . .	57
3.2	Messbare Indizierung der Atome . . . . .	59
3.3	Transformationssätze . . . . .	61

3.3.1	Translation und Skalierung . . . . .	61
3.3.2	Transformation in höherdimensionale Räume . . . . .	64
3.3.3	Radiale Simulation . . . . .	65
3.3.4	Ortsabhängige Verdünnung von Poisson-Prozessen; Simulationsalgorithmus . . . . .	67
3.4	Konnektivitätseigenschaften . . . . .	69
3.4.1	Kritische Eckpunktintensität von $r$ -Graphen . . . . .	69
3.4.2	Existenz unendlicher Cluster . . . . .	71
3.4.3	Ergodizität ergodischer Systeme . . . . .	72
3.5	Asymptotische Konnektivitätseigenschaften von $r$ -Graphen . . . . .	77
3.5.1	Kritischer Konnektivitätsradius . . . . .	77
3.5.2	Theorem vom Slivnyak-Typ . . . . .	78
3.5.3	$\alpha$ -Konnektivität . . . . .	80
3.5.4	Vollständige Konnektivität . . . . .	85
3.5.5	Chen–Stein–Schranke . . . . .	88
3.5.6	Kritische Wachstumsrate des Konnektivitätsradius . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Zufällige Mosaike</b> . . . . .	<b>98</b>
4.1	Delaunay–Mosaike und Voronoi–Mosaike . . . . .	99

**Literatur**

- [1] Barbour, A.D., Holst, L., Janson, S.  
Poisson Approximation. Clarendon Press, Oxford 1992
- [2] Bollobás, B., Riordan, O.  
Percolation. Cambridge University Press, Cambridge 2009
- [3] Durrett, R.  
Random Graph Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge 2007
- [4] Franceschetti, M., Meester, R.  
Random Networks for Communication. Cambridge University Press, Cambridge 2007
- [5] Grimmett, G.  
Percolation. Springer, Berlin 1999
- [6] Grimmett, G.  
Probability on Graphs – Random Processes on Graphs and Lattices. Cambridge University Press, Cambridge 2010
- [7] Kallenberg, O.  
Foundations of Modern Probability. Springer, New York 2001
- [8] Kendall, W.S., Molchanov, I.  
New Perspectives in Stochastic Geometry. Springer, Berlin 2010
- [9] Meester, R., Roy, R.  
Continuum Percolation. Cambridge University Press, Cambridge 1996
- [10] Penrose, M.D.  
Random Geometric Graphs. Oxford University Press, Oxford 2003
- [11] Schneider, R., Weil, W.  
Stochastic and Integral Geometry. Springer, Berlin 2008
- [12] Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J.  
Stochastic Geometry and its Applications. J. Wiley & Sons, Chichester 1995

## 1 Einleitung

Dieses Vorlesungskript gibt eine Einführung in einige grundlegende Modellierungsansätze für räumliche stochastische Netzwerke. Dabei werden insbesondere zufällige geometrische Graphen sowie zufällige Mosaikete betrachtet, die zu den wichtigsten Grundmodellen der stochastischen Geometrie gehören. Es werden Eigenschaften dieser Modelle, Algorithmen zu ihrer Simulation sowie hierauf aufbauende statistische Methoden diskutiert.

Schwerpunkte des Skriptes sind die folgenden Modelle:

- Zufällige Graphen mit vorgegebenen (deterministischen) Eckpunkten und zufälligem Kanten-system
- Zufällige Graphen, deren Eckpunkte einen Poissonschen Punktprozess bilden
- Zufällige Mosaikete, die durch Poissonsche Punktprozesse generiert werden

Typische Realisierungen dieser Modelle sind in den Abbildungen 1 – 3 dargestellt.

Das Skript ist im Zusammenhang mit einer Vorlesungsreihe erarbeitet worden, die im Wintersemester 2011/12 für Studenten und Doktoranden der Universität Ulm gehalten wurde und die anschließend im Sommersemester 2012 fortgesetzt werden soll. Besonderer Dank gebührt Herrn Dipl.-Math. Christian Hirsch für seine tatkräftige Unterstützung, die ganz wesentlich zur Verbesserung des Skriptes beigetragen hat.

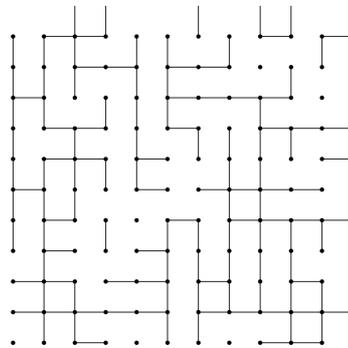


Abbildung 1: Zufällige Graphen auf regelmäßigen Gittern

## 2 Zufällige Graphen mit deterministischen Eckpunkten

In diesem Kapitel setzen wir stets vor, dass die Menge  $V$  der Eckpunkte eine abzählbar unendliche Teilmenge des  $d$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^d$  ist, die lokal endlich ist (also keine endlichen Häufungspunkte besitzt). Dabei ist  $d \geq 1$  eine beliebige, jedoch fest vorgegebene Zahl.

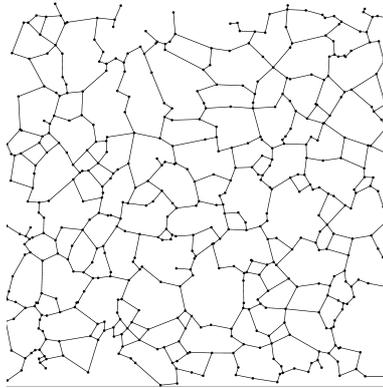


Abbildung 2: Zufälliger Graph, dessen Eckpunkte einen Poissonschen Punktprozess bilden

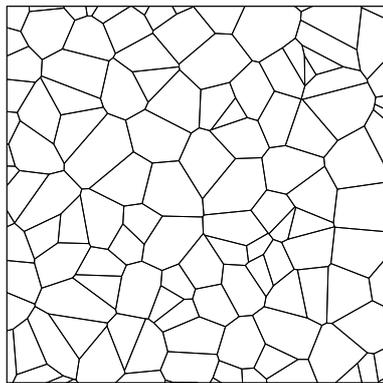


Abbildung 3: Poissonsches Voronoi-Mosaik

## 2.1 Grundbegriffe und elementare Eigenschaften

### 2.1.1 Konstruktion von geeigneten Wahrscheinlichkeitsräumen; Kopplungstheorem

- Sei  $V \subset \mathbb{R}^d$  eine beliebige lokal endliche Menge und sei  $E \subset \{(v, v') \in V \times V : v \neq v'\}$  eine Menge von (ungerichteten) Kanten, die jeweils zwei Eckpunkte miteinander verbinden.
  - Für beliebige  $v, v' \in V$  mit  $v \neq v'$  schreiben wir  $v \sim v'$ , wenn es ein  $n \geq 1$  und eine (endliche) Folge von Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n \in V$  gibt, so dass  $v_0 = v$ ,  $v_n = v'$  und  $(v, v_1), \dots, (v_{n-1}, v') \in E$ .
  - Ansonsten schreiben wir  $v \not\sim v'$
- Wir setzen stets voraus, dass der Graph  $G = (V, E)$  *zusammenhängend* und *lokal endlich* ist, d.h.,

- für beliebige  $v, v' \in V$  mit  $v \neq v'$  gilt  $v \sim v'$  und
- die Anzahl  $\gamma(v) = \#\{v' \in V : (v, v') \in E\}$  der Kanten, die von einem Knoten  $v \in V$  ausgehen, ist stets endlich.

### Beachte

- Die Bezeichnungen  $V$  und  $E$  gehen auf die englischen Worte „vertex“ = Eckpunkt bzw. „edge“ = Kante zurück.
- Anstelle von Eckpunkten und Kanten zu sprechen, werden wir auch „site“ = Eckpunkt bzw. „bond“ = Kante sagen.
- Die Zahl  $\gamma(v) = \#\{v' \in V : (v, v') \in E\}$  wird der *Grad* (bzw. in der natur- und ingenieurwissenschaftlichen Literatur auch die *Koordinationszahl*) des Eckpunktes  $v \in V$  genannt.
- Eine Folge von (paarweise voneinander verschiedenen) Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n \in V$ , so dass  $v_0 = v$ ,  $v_n = v'$  und  $(v, v_1), \dots, (v_{n-1}, v') \in E$  heißt (self-avoiding) *Pfad* von  $v$  nach  $v'$ .
- Ein Pfad  $v_0, \dots, v_n \in V$  lässt sich zu einem *Zyklus* ergänzen, wenn  $v_0 \sim v_n$  gilt.

Im folgenden betrachten wir Teilmengen von  $V$  (site configuration) bzw.  $E$  (bond configuration), die nach einem gewissen Zufallsprinzip ausgewählt werden.

Dies führt zu einem *Wahrscheinlichkeitsraum*  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  über der Familie aller Site- bzw. Bond-Konfigurationen, wobei wir uns zunächst auf die Betrachtung von Bond-Konfigurationen beschränken.

- Eine Funktion  $\omega : E \rightarrow \{0, 1\}$  heißt *Bond-Konfiguration*, wobei wir die Schreibweise  $e \mapsto \omega_e$  verwenden, d.h.  $\omega_e = \omega(e)$  für jedes  $e \in E$ .
- Sei  $\Omega = \{0, 1\}^E$  die Familie aller Bond-Konfigurationen. Dabei heißt eine Kante  $e \in E$  *aktiviert* in der Konfiguration  $\omega \in \Omega$  genau dann, wenn  $\omega_e = 1$ . Ein Pfad von  $v$  nach  $v'$  heißt *aktiviert*, wenn sämtliche Kanten des Pfades aktiviert sind.
- Sei  $\mathcal{A}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , die die so genannten *Zylindermengen*

$$C(F, z) = \{\omega \in \Omega : \omega_f = z_f \text{ for all } f \in F\}$$

enthält, wobei  $F$  eine endliche Teilmenge von  $E$  ist und  $z \in \{0, 1\}^F$ .

- Sei  $\mathbf{p} = \{p_e : e \in E\}$  eine beliebige Wahrscheinlichkeitsfunktion über  $E$ , d.h., es gelte  $0 \leq p_e \leq 1$  für jedes  $e \in E$ . Außerdem sei  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  das (eindeutig bestimmte) Wahrscheinlichkeitsmaß, so das

$$\mathbb{P}(C(F, z)) = \prod_{\{f \in F : z_f = 1\}} p_f \prod_{\{f \in F : z_f = 0\}} (1 - p_f) \quad (1)$$

für jede endliche Teilmenge  $F \subset E$  und für jedes  $z \in \{0, 1\}^F$ .

**Beachte**

- Weil  $V \subset \mathbb{R}^d$  vorausgesetzt wird, können wir jede Kante  $e = (v, v') \in E$  als abgeschlossenes Intervall  $e = [v, v'] \subset \mathbb{R}^d$  auffassen.
- Außerdem sei  $\mathcal{F}$  die Familie der abgeschlossenen Teilmengen in  $\mathbb{R}^d$ , und  $\sigma_{\mathcal{F}}$  sei die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\mathcal{F}$ , die die so genannten *Schnittmengen*  $\{B \in \mathcal{F} : B \cap K \neq \emptyset\}$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^d$  enthält.
- Die  $(\mathcal{A}, \sigma_{\mathcal{F}})$ -messbare Zufallsvariable  $\Xi_{\mathbf{p}} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ , wobei  $\Xi_{\mathbf{p}}(\omega) = \bigcup_{e \in E: \omega_e=1} e$  die Vereinigungsmenge der aktivierten Kanten ist, kann dann als *zufälliger geometrischer Graph* aufgefasst werden, der über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  gegeben ist.
- Dabei hat  $\Xi_{\mathbf{p}}$  eine vorgegebene (deterministische) Menge von Eckpunkten und ein zufälliges Kantensystem.
- Wenn es ein  $p \in [0, 1]$  gibt, so dass  $p_e = p$  für alle  $e \in E$ , dann schreiben wir  $\Xi_p$  anstelle von  $\Xi_{\mathbf{p}}$ .

Es gilt das folgende elementare *Kopplungstheorem* für die Familie von zufälligen Graphen  $\{\Xi_p, p \in [0, 1]\}$ .

**Theorem 2.1** *Es gibt einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$  und einen stochastischen Prozess  $\{\tilde{\Xi}_p, p \in [0, 1]\}$  über  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$  mit Werten in  $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$ , so dass  $\tilde{\Xi}_p \stackrel{D}{=} \Xi_p$  für jedes  $p \in [0, 1]$  und*

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\Xi}_p \subset \tilde{\Xi}_{p'}) = 1 \quad \text{für beliebige } p, p' \in [0, 1] \text{ mit } p \leq p'. \quad (2)$$

**Beweis**

- Sei  $\{X_e, e \in E\}$  eine Familie von unabhängigen und in  $[0, 1]$ -gleichverteilten Zufallsvariablen, die über dem (kanonischen) Wahrscheinlichkeitsraum  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$  gegeben sind mit

$$\tilde{\Omega} = [0, 1]^E, \quad \tilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{B} \cap [0, 1])^E \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbb{P}} = \text{U}[0, 1]^E,$$

wobei  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}$  bezeichnet.

- Außerdem sei  $\tilde{\Xi}_p(\tilde{\omega}) = \bigcup_{e \in E: X_e(\tilde{\omega}) \leq p} e$  für jedes  $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ .
- Für den so definierten stochastischen Prozess  $\{\tilde{\Xi}_p, p \in [0, 1]\}$  gilt offenbar, dass  $\tilde{\Xi}_p \stackrel{D}{=} \Xi_p$  für jedes  $p \in [0, 1]$ , und (2) ist ebenfalls erfüllt.

**2.1.2 Monotone Klassen; 0–1–Gesetz von Kolmogorow**

Wir benötigen zwei Hilfssätze über  $\sigma$ -Algebren bzw. monotone Klassen sowie das so genannte *0-1-Gesetz von Kolmogorow*.

**Definition** Sei  $\Omega$  eine beliebige nichtleere Menge.

- Sei  $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$  eine monoton wachsende Folge von Mengen, d.h.,  $A_n \subset A_{n+1}$  gelte für jedes  $n \geq 1$ . Dann schreiben wir  $A_n \uparrow A$ , wobei  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

- Sei  $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$  eine monoton fallende Folge von Mengen, d.h.,  $A_n \supset A_{n+1}$  gelte für jedes  $n \geq 1$ . Dann schreiben wir  $A_n \downarrow A$ , wobei  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .
- Eine Familie  $\mathcal{M}$  von Teilmengen von  $\Omega$  heißt *monotone Klasse*, für jede Folge  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$  aus  $A_n \uparrow A$  bzw.  $A_n \downarrow A$  stets die Gültigkeit von  $A \in \mathcal{M}$  folgt.

**Lemma 2.1** Sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra über  $\Omega$ . Es gilt:  $\mathcal{A}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra genau dann, wenn  $\mathcal{A}$  eine monotone Klasse ist.

**Beweis**

- Jede  $\sigma$ -Algebra ist offenbar eine monotone Klasse.
- Sei nun  $\mathcal{A}$  eine monotone Klasse und  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ .
  - Für jedes  $n \geq 1$  sei  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Dann gilt  $B_n \subset B_{n+1}$  und  $B_n \in \mathcal{A}$  für jedes  $n \geq 1$  (weil  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist).
  - Aus der Definition von monotonen Klassen ergibt sich somit, dass  $B_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .
  - Analog zeigt man, dass  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Lemma 2.2** Sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra über  $\Omega$  und  $\mu(\mathcal{A})$  die kleinste monotone Klasse, die  $\mathcal{A}$  enthält. Dann gilt

$$\mu(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}). \quad (3)$$

**Beweis**

- Aus Lemma 2.1 ergibt sich, dass  $\mu(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ .
- Es genügt also zu zeigen, dass  $\mu(\mathcal{A})$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.
- Weil  $\mathcal{M} = \mu(\mathcal{A})$  eine monotone Klasse ist, genügt es wegen Lemma 2.1 sogar zu zeigen, dass  $\mu(\mathcal{A})$  eine Algebra ist.
- Sei  $A \in \mathcal{M}$ . Wir zeigen zunächst, dass dann auch das Komplement  $A^c = \Omega \setminus A$  zu  $\mathcal{M}$  gehört, d.h.,  $A^c \in \mathcal{M}$ .
  - Hierfür betrachten wir das sogenannte *Prinzip der geeigneten Mengen*.
  - Sei  $\mathcal{M}' = \{B \subset \Omega : B \in \mathcal{M}, B^c \in \mathcal{M}\}$  die Familie aller diejenigen Mengen aus  $\mathcal{M}$ , die die uns interessierende Eigenschaft besitzen.
  - Offenbar gilt  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ . Somit ergibt sich die Gültigkeit von  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ , wenn wir zeigen, dass  $\mathcal{M}'$  eine monotone Klasse ist.
  - Für jedes  $n \geq 1$  gelte  $B_n \in \mathcal{M}'$  und  $B_n \subset B_{n+1}$ , d.h., es gilt  $B_n, B_n^c \in \mathcal{M}$  und (weil  $\mathcal{M}$  eine monotone Klasse ist)  $\lim \uparrow B_n \in \mathcal{M}$  sowie  $\lim \downarrow B_n^c \in \mathcal{M}$ .
  - Hieraus ergibt sich außerdem, dass  $(\lim \uparrow B_n)^c = \lim \downarrow B_n^c \in \mathcal{M}$ .
  - Analog ergibt sich aus  $B_n \in \mathcal{M}'$  und  $B_n \supset B_{n+1}$  für jedes  $n \geq 1$ , dass  $\lim \downarrow B_n \in \mathcal{M}$  sowie  $\lim \uparrow B_n^c \in \mathcal{M}$  bzw.  $(\lim \downarrow B_n)^c = \lim \uparrow B_n^c \in \mathcal{M}$ .

- Nun genügt es noch zu zeigen, dass  $\mathcal{M}$  abgeschlossen bezüglich der Bildung von Durchschnitten ist, wobei wir erneut das Prinzip der interessierenden Mengen betrachten.
- Beachte, dass

$$\lim \downarrow (A \cap B_n) = A \cap \lim \downarrow B_n \quad \text{für } A, B_1, B_2, \dots \subset \Omega \text{ mit } B_n \supset B_{n+1} \quad (4)$$

bzw.

$$\lim \uparrow (A \cap B_n) = A \cap \lim \uparrow B_n \quad \text{für } A, B_1, B_2, \dots \subset \Omega \text{ mit } B_n \subset B_{n+1}. \quad (5)$$

- Sei nun  $A \in \mathcal{A}$  und  $\mathcal{M}_A = \{B \subset \Omega : B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M}\}$ .
  - Wegen (4) und (5) ist klar, dass  $\mathcal{M}_A$  eine monotone Klasse ist.
  - Außerdem sieht man leicht, dass für beliebige  $A, B \in \mathcal{A}$

$$A \in \mathcal{M}_B \quad \text{genau dann, wenn} \quad B \in \mathcal{M}_A. \quad (6)$$

- Weil offenbar  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$  und weil  $\mathcal{M}_A$  eine monotone Klasse ist, gilt  $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$ .
- Somit ergibt sich aus (6), dass für beliebige  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{M}$

$$A \in \mathcal{M}_B \quad \text{genau dann, wenn} \quad B \in \mathcal{M}_A = \mathcal{M}.$$

- Somit gilt für beliebige  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{M}$ , dass  $A \in \mathcal{M}_B$ .
- Weil die Menge  $A \in \mathcal{A}$  beliebig ist, ergibt sich hieraus, dass  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}$  bzw.  $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}$  für jedes  $B \in \mathcal{M}$ .
- Für beliebige  $B, C \in \mathcal{M}$  gilt somit auch  $B \cup C \in \mathcal{M}$ .
- Die monotone Klasse  $\mathcal{M}$  ist also abgeschlossen bezüglich Komplement- und Durchschnittsbildung (und folglich auch bezüglich der Bildung von Vereinigungen).

### Lemma 2.3

- Sei  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, die über einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  gegeben sind.
- Für jedes  $n \geq 1$  sei  $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n) \subset \mathcal{A}$  die kleinste Teil- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$ , die sämtliche Urbilder der Abbildungen  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  enthält. Außerdem sei  $\mathcal{A}_\infty = \sigma(X_1, X_2, \dots) \subset \mathcal{A}$  die kleinste Teil- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$ , die die Urbilder aller Abbildungen  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  enthält.
- Wenn das Ereignis  $A \in \mathcal{A}_\infty$  für jedes  $n \geq 1$  unabhängig von  $\mathcal{A}_n$  ist, d.h., wenn

$$\mathbb{P}(A \cap A') = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(A') \quad \text{für beliebige } n \geq 1 \text{ und } A' \in \mathcal{A}_n, \quad (7)$$

dann gilt  $\mathbb{P}(A) = 0$  oder  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**Beweis**

- Zunächst zeigen wir, dass es für jedes  $A \in \mathcal{A}_\infty$  eine Folge  $A_1, A_2, \dots$  von Ereignissen gibt, so dass  $A_n \in \mathcal{A}_n$  für jedes  $n \geq 1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n \cap A) = \mathbb{P}(A). \quad (8)$$

– Sei

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A}_\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n \cap A) = \mathbb{P}(A)\}$$

die Familie derjenigen Ereignisse aus  $\mathcal{A}_\infty$ , für die die Bedingung (8) erfüllt ist.

- Man kann sich leicht überlegen, dass  $\mathcal{M}$  eine monotone Klasse ist, die die Algebra  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots$  enthält.
- Aus Lemma 2.2 ergibt sich somit, dass  $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots) = \mathcal{A}_\infty$ .
- Sei nun das Ereignis  $A \in \mathcal{A}_\infty$  für jedes  $n \geq 1$  unabhängig von  $\mathcal{A}_n$ .
- Dann ergibt sich aus (7) und (8), dass

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n \cap A) = \mathbb{P}(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}^2(A).$$

– Dies impliziert, dass  $\mathbb{P}(A) = 0$  oder  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**2.1.3 Existenz unendlicher Cluster; Perkulationswahrscheinlichkeiten**

- Mit  $\{x \rightarrow y\} \subset \Omega$  bezeichnen wir das Ereignis, dass es einen aktivierten Pfad von  $x \in V$  nach  $y \in V$  gibt. Mit  $\mathbb{P}(x \rightarrow y)$  bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.
- Außerdem bezeichnet  $\{x \rightarrow \infty\} \subset \Omega$  das Ereignis, dass es einen unendlichen aktivierten Pfad gibt, der in  $x \in V$  beginnt.
- Sei  $C_x = \{y \in V : x \rightarrow y\}$  der (zufällige) *aktive Cluster*, der den Eckpunkt  $x \in V$  enthält, d.h.,  $C_x$  ist die (zufällige) Menge aller derjenigen Eckpunkte  $y \in V$ , zu denen es einen aktivierten Pfad gibt, und sei  $\theta_x(\mathbf{p})$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Cluster  $C_x$  unendlich ist, d.h.,

$$\theta_x(\mathbf{p}) = \mathbb{P}(|C_x| = \infty) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(x \rightarrow \infty). \quad (9)$$

- Wenn es ein  $p \in [0, 1]$  gibt, so dass  $p_e = p$  für alle  $e \in E$ , dann schreiben wir  $\theta_x(p)$  anstelle von  $\theta_x(\mathbf{p})$ .
- Aus Theorem 2.1 ergibt sich, dass

$$\theta_x(p) \leq \theta_x(p') \quad \text{für beliebige } p, p' \in [0, 1] \text{ mit } p \leq p'. \quad (10)$$

Die (zunächst für jedes einzelne  $x \in V$  betrachtete) Monotonieeigenschaft (10) der Funktion  $\theta_x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  lässt sich folgendermaßen verschärfen.

**Theorem 2.2** *Es gibt eine (universelle, d.h. nicht von  $x \in V$  abhängende) Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_c \in [0, 1]$ , so dass für jedes  $x \in V$  gilt:  $\theta_x(p) = 0$ , wenn  $p < p_c$ , und  $\theta_x(p) > 0$ , wenn  $p > p_c$ .*

**Beweis**

- Seien  $x, y \in V$  beliebige Eckpunkte mit  $x \neq y$ , die durch einen Pfad miteinander verbunden sind, der aus  $n \geq 1$  Kanten besteht.
- Dann gilt  $\theta_x(p) \geq p^n \theta_y(p)$  für jedes  $p \in [0, 1]$ .
- Für jedes  $p \in [0, 1]$  gilt also entweder  $\theta_x(p) = 0$  für jedes  $x \in V$  oder  $\theta_x(p) > 0$  für jedes  $x \in V$ .
- Hieraus und aus der Monotonieeigenschaft (10) ergibt sich die Behauptung.

**Beachte** Den Schwellenwert  $p_c$  nennt man die *kritische (Auswahl-) Wahrscheinlichkeit*.

Aus Theorem 2.2 ergibt sich ein weiteres interessantes Resultat bezüglich der Existenz von unendlichen aktivierten Clustern.

**Theorem 2.3** Sei  $A = \{|C_x| = \infty \text{ für ein } x \in V\}$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p < p_c, \\ 1, & \text{wenn } p > p_c. \end{cases} \quad (11)$$

**Beweis**

- Sei  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$  die Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, die im Beweis von Theorem 2.1 betrachtet wurde.
- Für jedes  $n \geq 1$  hängt dann das Ereignis  $A = \{|C_x| = \infty \text{ für ein } x \in V\}$  nicht von den Werten der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  ab, d.h., die Bedingung (7) ist erfüllt.
- Aus Lemma 2.3 ergibt sich deshalb, dass  $\mathbb{P}(A) = 0$  oder  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- Wenn  $p < p_c$ , dann ergibt sich aus Theorem 2.2 und aus der Subadditivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen, dass

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{x \in V} \theta_x(p) = 0.$$

- Wenn  $p > p_c$ , dann ergibt sich Theorem 2.2, dass  $\mathbb{P}(A) \geq \theta_x(p) > 0$  für jedes  $x \in V$  und somit  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**Beachte**

- Die Einschränkung der Funktion  $\theta_x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  auf das Intervall  $[p_c, 1]$  hängt natürlich im allgemeinen von  $x \in V$  ab.
- Es gibt jedoch Graphen  $G = (V, E)$ , bei denen die so genannten *Perkolationswahrscheinlichkeiten*  $\{\theta_x(p), p \in [0, 1]\}$  insgesamt nicht von  $x \in V$  abhängen. Dann schreiben wir  $\theta(p)$  anstelle von  $\theta_x(p)$ .
- Dies gilt beispielsweise, wenn  $V$  die Menge derjenigen Punkte in  $\mathbb{R}^d$  ist, deren Koordinaten ganze Zahlen sind, d.h.,  $V = \mathbb{Z}^d$ , und  $G = (V, E)$  das zugehörige  $d$ -dimensionale (hyper-) kubische Gitter in  $\mathbb{R}^d$  ist.

Außer den Perkolationswahrscheinlichkeiten  $\{\theta_x(p), p \in [0, 1]\}$  betrachten wir noch für jedes  $x \in V$  die Erwartungswertfunktion  $\{\chi_x(p), p \in [0, 1]\}$ , wobei

$$\chi_x(p) = \mathbb{E} |C_x|. \quad (12)$$

- Genauso wie (10) ergibt sich aus Theorem 2.1, dass

$$\chi_x(p) \leq \chi_x(p') \quad \text{für beliebige } p, p' \in [0, 1] \text{ mit } p \leq p'. \quad (13)$$

- Darüber hinaus kann man ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.2 zeigen, dass es eine (universelle, d.h. nicht von  $x \in V$  abhängende) Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_{ec} \in [0, 1]$  gibt, so dass für jedes  $x \in V$  gilt:  $\chi_x(p) < \infty$ , wenn  $p < p_{ec}$ , und  $\chi_x(p) = \infty$ , wenn  $p > p_{ec}$ .
- Es gilt also

$$p_{ec} = \sup\{p \in [0, 1] : \chi_x(p) < \infty\} = \inf\{p \in [0, 1] : \chi_x(p) = \infty\}, \quad (14)$$

wobei der Wert des Supremums bzw. Infimums nicht von  $x \in V$  abhängt.

- Aus den Definitionsgleichungen (9) und (12) ergibt sich außerdem, dass stets  $p_{ec} \leq p_c$  gilt, weil

$$\chi_x(p) = \mathbb{E} |C_x| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|C_x| \geq n).$$

## 2.2 Beispiele

### 2.2.1 $k$ -reguläre Bäume

Wir betrachten nun eine Klasse von zufälligen geometrischen Graphen, so genannte Bäume, für die  $p_{ec} = p_c$  gilt, wobei die kritischen Wahrscheinlichkeiten  $p_c$  und  $p_{ec}$  sogar explizit bestimmt werden können (was eher eine Ausnahme ist). Dabei sagen wir, dass ein zusammenhängender Graph  $G = (V, E)$  ein *Baum* ist, wenn  $G$  keine Zyklen enthält.

#### Definitionen

- Sei  $k \geq 2$  eine beliebige natürliche Zahl und sei  $G = (V, E)$  ein Baum, so dass jeder Eckpunkt den Grad  $k$  hat, d.h.,  $\gamma(v) = \#\{v' \in V : (v, v') \in E\} = k$  für jedes  $v \in V$ . Dann sagt man, dass  $G = (V, E)$  ein  *$k$ -regulärer Baum* ist, vgl. Abbildung 4.
- Manchmal ist es zweckmäßiger, (gerichtete) Teilgraphen von  $k$ -regulären Bäumen zu betrachten, und zwar ausgehend von einem beliebigen, jedoch fest vorgegebenen Eckpunkt  $v_0 \in V$ .
- Jeder Eckpunkt dieses gerichteten Teilgraphen hat dann  $k - 1$  „Nachkommen“ (mit Ausnahme des *Anfangsknotens*  $v_0$ ), vgl. Abbildung 5.
- Der gerichtete Teilgraph wird dann mit  $G_{k-1}$  bezeichnet und *Verzweigungsbaum* der Ordnung  $k - 1$  genannt, wobei  $G_{k-1, n}$  den „Teil—Teil—Graph“ der ersten  $n$  Nachkommen-Generationen von  $G_{k-1}$  bezeichnet;  $n \geq 1$ .

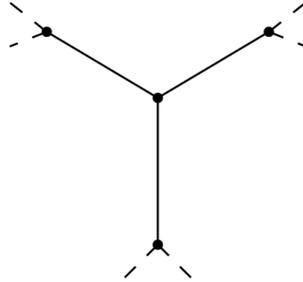
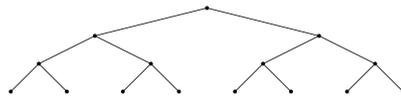


Abbildung 4: 3-regulärer Baum

Abbildung 5: Verzweigungsbaum vom Typ  $G_{2,3}$ 

**Theorem 2.4** Sei  $G = (V, E)$  ein  $k$ -regulärer Baum. Dann gilt  $p_c = p_{ec} = 1/(k-1)$  für jedes  $k \geq 2$ .

### Beweis

- Für jedes  $n \geq 1$  sei  $\pi_n = \pi_{k,n}(p)$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $G_{k-1,n}$  einen aktivierten Pfad vom Anfangsknoten  $v_0$  zu einem der „Blattknoten“ der  $n$ -ten Nachkommengeneration besitzt.
- Ein solcher Pfad existiert genau dann, wenn die Kante  $(v_0, v_1)$  für einen der unmittelbaren Nachkommen  $v_1$  von  $v_0$  aktiviert ist und wenn es einen aktivierten Pfad der Länge  $n-1$  von  $v_1$  zu einem der „Blattknoten“ gibt.
- Hieraus ergibt sich, dass

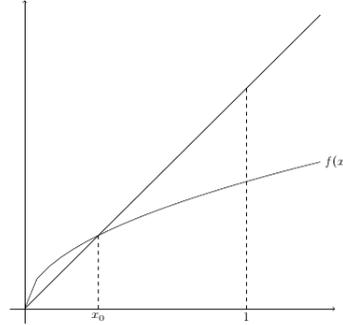
$$\pi_n = 1 - (1 - p \pi_{n-1})^{k-1} \quad \text{für jedes } n \geq 1, \quad (15)$$

wobei  $\pi_0 = 1$  gesetzt wird.

- Sei  $0 < p < 1$  und die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sei gegeben durch

$$f(x) = 1 - (1 - px)^{k-1} \quad \text{für jedes } x \in [0, 1]. \quad (16)$$

- Die so definierte Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ist wachsend und konkav im Intervall  $[0, 1]$ , wobei  $f(0) = 0$  und  $f(1) < 1$ .

Abbildung 6: Graph der Funktion  $f$ 

- Es gibt also ein  $x_0 \in (0, 1)$  mit  $f(x_0) = x_0$  genau dann, wenn  $f'(0+0) = (k-1)p > 1$ , wobei in diesem Fall der Fixpunkt  $x_0 \in (0, 1)$  eindeutig bestimmt ist, vgl. Abbildung 6.
- Wenn  $p > 1/(k-1)$  gilt, dann ergibt sich hieraus und aus (15), dass  $\pi_{n-1} \geq x_0$  die Ungleichung  $\pi_n \geq x_0$  impliziert.
  - Wegen  $\pi_0 = 1$  ergibt sich somit, dass  $\pi_n \geq x_0$  für jedes  $n \geq 1$ .
  - Außerdem ergibt sich aus (15), dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = x_0$ .
  - Dies bedeutet, dass  $\theta_{v_0}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = x_0 > 0$  bzw.  $p_c \leq 1/(k-1)$ .
- Wenn andererseits  $p \leq 1/(k-1)$  gilt, dann ist  $x_0 = 0$  der einzige Fixpunkt der in (16) eingeführten Funktion.
  - Dies impliziert, dass  $\theta_{v_0}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = x_0 = 0$  bzw.  $p_c \geq 1/(k-1)$ .
  - Insgesamt haben wir also gezeigt, dass  $p_c = 1/(k-1)$ .
- Es bleibt noch zu zeigen, dass auch  $p_{ec} = 1/(k-1)$  für jedes  $k \geq 2$  gilt.
  - Hierfür genügt es zu beachten, dass

$$\chi_{v_0}(p) = \mathbb{E} |C_{v_0}| = \sum_{v \in V} \mathbb{P}(v \in C_{v_0}) = \sum_{i=0}^{\infty} (k-1)^i p^i.$$

- Dies impliziert, dass  $\chi_{v_0}(p) < \infty$ , wenn  $p < 1/(k-1)$ , und  $\chi_{v_0}(p) = \infty$ , wenn  $p \geq 1/(k-1)$ .

### 2.2.2 Graphen in $\mathbb{R}^2$ mit konvexen polygonalen Zellen; duale Graphen

In diesem Abschnitt betrachten wir planare Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V \subset \mathbb{R}^2$ , deren Kantensystem  $\bigcup_{e \in E} e$  die euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$  in konvexe polygonale Zellen zerlegt. Beispiele hierfür sind quadratische bzw. hexagonale Gitter, vgl. die Abbildungen 7 und 8.

Außerdem führen wir die Begriffe des dualen Graphen sowie des externen Randes von endlichen zusammenhängenden Teilgraphen ein, die im weiteren Verlauf der Vorlesung nützlich sein werden.

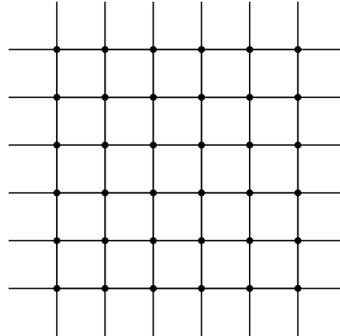


Abbildung 7: Quadratisches Gitter

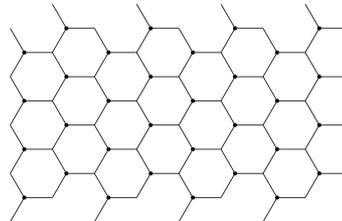


Abbildung 8: Hexagonales Gitter

### Definitionen

- Sei  $G = (V, E)$  das *quadratische (Einheits-) Gitter* in  $\mathbb{R}^2$ , d.h.,

$$V = \mathbb{Z}^2 \quad \text{und} \quad E = \{(v, v') \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : |v - v'| = 1\}. \quad (17)$$

- Für jeden Eckpunkt  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$  bildet dann die konvexe Hülle  $H_{x_1, x_2}$  der vier Eckpunkte

$$(x_1, x_2), (x_1 + 1, x_2), (x_1, x_2 + 1), (x_1 + 1, x_2 + 1) \in \mathbb{Z}^2$$

eine so genannte *Zelle* des Graphen  $G = (V, E)$ .

- Für jedes  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$  sei  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \text{int}H_{x_1, x_2}$  ein innerer Punkt der Zelle  $H_{x_1, x_2}$ , beispielsweise  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1 + 1/2, x_2 + 1/2)$ .
- Sei  $V^* \in \mathbb{R}^2$  die Menge dieser (inneren) Zellpunkte und  $E^*$  das Kantensystem, das die Zellpunkte benachbarter Zellen miteinander verbindet. Dann sagt man, dass  $G^* = (V^*, E^*)$  ein *dualer Graph* von  $G = (V, E)$  ist, vgl. Abbildung 9.

**Beachte** Im folgenden werden wir stets voraussetzen, dass eine Kante  $e^* \in E^*$  des dualen Graphen genau dann aktiviert ist, wenn die zugehörige Kante  $e \in E$  nicht aktiviert ist.

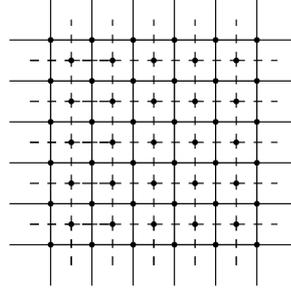
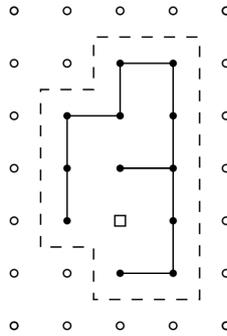


Abbildung 9: Dualer Graph des quadratischen Gitters

Abbildung 10: Externer Rand von  $G_C = (C, E_C)$ **Definitionen** (Fortsetzung)

- Sei  $G_C = (C, E_C)$  ein endlicher zusammenhängender Teilgraph des in (17) gegebenen quadratischen Gitters  $G = (V, E)$ , so dass  $C \subset V$  mit  $|C| < \infty$  und  $E_C = \{e = (v, v') \in E : v, v' \in C\}$ .
- Außerdem sei  $G_{V \setminus C}^\infty = ((V \setminus C)^\infty, E_{V \setminus C}^\infty)$  der (eindeutig bestimmte) unendliche zusammenhängende Cluster des Graphen  $(V \setminus C, E_{V \setminus C})$  mit  $E_{V \setminus C} = \{e = (v, v') \in E : v, v' \in V \setminus C\}$ .
- Derjenige Teil  $\partial E_C^*$  des Kantensystems  $E^*$  des dualen Graphen  $G^*$ , der Kanten  $(v, v') \in E$  von  $G$  schneidet, so dass  $v \in C$  und  $v' \in (V \setminus C)^\infty$ , wird der *externe Rand* von  $G_C = (C, E_C)$  genannt, vgl. Abbildung 10.

Das folgende graphentheoretische Hilfsergebnis wird im Beweis von Theorem 2.5 benötigt.

**Lemma 2.4**

- Sei  $G_C = (C, E_C)$  ein endlicher zusammenhängender Teilgraph des quadratischen Gitters über  $\mathbb{Z}^2$ , d.h.,
  - es gelte  $C \subset \mathbb{Z}^2$  mit  $|C| < \infty$
  - und für beliebige  $v, v' \in C$  gebe es einen Pfad von  $v$  nach  $v'$ .
- Dann ist der externe Rand  $\partial E_C^*$  von  $G_C = (C, E_C)$  ein Zyklus in  $G^* = (V^*, E^*)$ , der die Menge  $C$  in seinem Inneren enthält.

**Beweis**

- Sei  $E_{C, (V \setminus C)^\infty}$  die Menge derjenigen (gerichteten) Kanten in  $E$ , die von  $C$  nach  $(V \setminus C)^\infty$  zeigen.
- Für jedes  $e \in E_{C, (V \setminus C)^\infty}$  sei  $e^* = (x^*, y^*) \in \partial E_C^*$  die zugehörige (um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn gedrehte, gerichtete) Kante in  $E^*$ .
  - Seien  $a, b, c, d \in V$  die (in zyklischer Reihenfolge) angeordneten Eckpunkte der zu  $e^*$  gehörenden Zelle, so dass  $e = (a, b)$ .
  - Dies impliziert, dass  $a \in C$  und  $b \in C^\infty$ , wobei  $C^\infty = (V \setminus C)^\infty$ .
- Außerdem sei  $R = V \setminus (C \cup C^\infty)$ , d.h.,  $R$  ist die Menge der Eckpunkte der endlichen Cluster von  $(V \setminus C, E_{V \setminus C})$ .
- Wir nehmen zunächst an, dass  $d \in C$ . Dann gilt  $c \in C$  oder  $c \in C^\infty$ , weil  $c \sim b \in C^\infty$  (und somit  $c$  nicht zu  $R$  gehören kann).
  - Im ersten Fall ist  $(c, b)^*$  die einzige (gerichtete) Kante in  $\partial E_C^*$ , die von  $y^*$  ausgeht.
  - Im zweiten Fall gilt dies für  $(dc)^*$ .
- Wenn  $c \in C^\infty$ , dann gilt  $d \notin R$  und folglich  $d \in C$  oder  $d \in C^\infty$ , d.h., die eben hergeleitete Eindeutigkeitsaussage ist erneut richtig.
- Wir nehmen nun an, dass  $c \notin C^\infty$  und  $d \notin C$ . Dies impliziert, dass  $c \in C$  (weil  $c \sim b \in C^\infty$ ).
- Wenn  $d \in R$ , dann ergibt sich erneut die Eindeutigkeitsaussage, so dass nur noch der Fall  $a, c \in C$  und  $b, d \in C^\infty$  untersucht werden muss.
  - Dies würde aber bedeuten, dass es disjunkte Pfade in  $G_C$  bzw.  $G_{V \setminus C}^\infty$  gibt, die  $a$  mit  $c$  bzw.  $b$  mit  $d$  verbinden.
  - Weil andererseits  $a, b, c, d \in V$  ein Zyklus in  $G$  ist, der keine Eckpunkte in seinem Inneren enthält, müssten die beiden Pfade außerhalb des Zyklus verlaufen.
  - Dies impliziert jedoch, dass beide Pfade mindestens einen (gemeinsamen) Schnittpunkt besitzen müssen, vgl. Abbildung 11.
- Wir haben also gezeigt, dass jede (gerichtete) Kante in  $\partial E_C^*$  einen eindeutig bestimmten Nachfolger hat, d.h.,  $\partial E_C^*$  besitzt mindestens einen Zyklus  $Z \subset E^*$  in  $G^* = (V^*, E^*)$ .

- Wenn  $e^* \in \partial E_C^*$  mit  $e = (a, b)$ , dann liegt einer der beiden Eckpunkte  $a, b$  in  $C$  und der andere in  $C^\infty$ .
- Der Zyklus  $Z$  muss also die Kante  $e$  schneiden, d.h.,  $e^* \in Z$ .
- Damit ist gezeigt, dass  $\partial E_C^*$  aus genau einem Zyklus besteht, der die Menge  $C$  in seinem Inneren enthält.

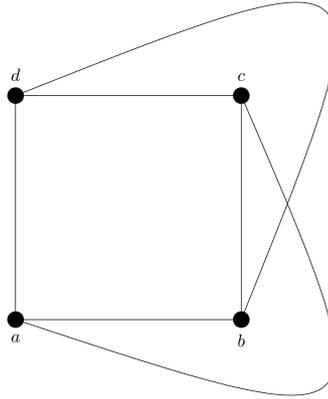


Abbildung 11: Äußere planare Pfade, die mindestens einen Schnittpunkt besitzen

### 2.2.3 Kubische Gitter in $\mathbb{R}^d$

Sei nun  $G = (V, E)$  das (hyper-) kubische Gitter in  $\mathbb{R}^d$ , d.h.,

$$V = \mathbb{Z}^d \quad \text{und} \quad E = \{(v, v') \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : |v - v'| = 1\}. \quad (18)$$

**Theorem 2.5** *Es gilt  $1/(2d - 1) \leq p_{ec} \leq p_c \leq 2/3$ .*

**Beweis**

- Sei  $p < 1/(2d - 1)$  und  $C_o$  bezeichne den aktivierten Cluster des Nullpunktes  $o \in \mathbb{Z}^d$ , wobei  $C_o = \emptyset$  gesetzt wird, wenn der Eckpunkt  $o \in \mathbb{Z}^d$  nicht aktiviert ist.
  - Wenn  $C_o \setminus \{o\} \neq \emptyset$ , dann gibt es für jedes  $x \in C_o \setminus \{o\}$  mindestens einen aktivierten Pfad von  $o$  nach  $x$ . Für die (zufällige) Anzahl  $X : \Omega \rightarrow 0, 1, \dots$  der aktivierten Pfade, die vom Nullpunkt ausgehen, gilt also

$$|C_o| \leq X. \quad (19)$$

- Für jedes  $n \geq 1$  bezeichne  $\mu_n$  die (Gesamt-) Anzahl der vom Nullpunkt ausgehenden Pfade der Länge  $n$ . Dann kann man sich leicht überlegen, dass

$$\mu_n \leq 2d \cdot (2d - 1)^{n-1}, \quad (20)$$

- und die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Pfad aktiviert ist, ist gleich  $p^n$ .
- Hieraus und aus (19) – (20) ergibt sich, dass

$$\chi_o(p) = \mathbb{E}|C_o| \leq \mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n p^n \leq 1 + \frac{2d}{2d-1} \sum_{n=1}^{\infty} ((2d-1)p)^n < \infty. \quad (21)$$

- Weil  $p < 1/(2d-1)$  beliebig gewählt war, impliziert dies, dass  $p_{es} \geq 1/(2d-1)$ .
- Am Ende von Abschnitt 2.1.3 hatten wir uns überlegt, dass stets  $p_{es} \leq p_c$  gilt. Es genügt also noch zu zeigen, dass  $p_c \leq 2/3$ , wobei wir hier der Einfachheit wegen nur den Spezialfall  $d = 2$  betrachten.
  - Sei  $p > 2/3$  und sei  $k \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl.
  - Mit  $L_k$  bezeichnen wir das Segment, das den Nullpunkt mit dem Punkt  $(k, 0) \in \mathbb{Z}^2$  verbindet.
  - Außerdem sei  $Z_\ell$  ein Zyklus des dualen Graphen  $G^* = (V^*, E^*)$ , der das Segment  $L_k$  in seinem Inneren enthält und die Länge  $2\ell$  besitzt (für ein  $\ell \geq 1$ ).
  - Dann schneidet ein Segment  $e^* \subset Z_\ell$  die (positive) x-Achse in einem Punkt zwischen  $k + 1/2$  und  $(2\ell - 3)/2$ , wofür es weniger als  $\ell$  Möglichkeiten gibt.
  - Weil der restliche Pfad  $Z_\ell \setminus \{e^*\}$  die Länge  $2\ell - 1$  hat, gibt es insgesamt höchstens  $\ell\mu_{2\ell-1}$  Möglichkeiten für den Zyklus  $Z_\ell$ , wobei

$$\mu_{2\ell-1} \leq 4 \cdot 3^{2\ell-2}.$$

- Sei  $Y_k : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$  die (zufällige) Anzahl der aktivierten dualen Zyklen, die das Segment  $L_k$  in ihrem Inneren enthalten.
  - Dann gilt

$$\mathbb{E}Y_k \leq \sum_{\ell=k+2}^{\infty} \ell\mu_{2\ell-1}(1-p)^{2\ell} \leq \sum_{\ell=k+2}^{\infty} \frac{4\ell}{9} (3(1-p))^{2\ell},$$

- wobei die letzte Summe konvergiert, weil wir vorausgesetzt hatten, dass  $3(1-p) < 1$ .
- Dies impliziert außerdem, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}Y_k = 0$ , und somit gibt es ein  $k_0 \geq 1$ , so dass  $\mathbb{E}Y_k < 1$  für jedes  $k \geq k_0$ .
- Hieraus ergibt für  $A_k = \{Y_k = 0\}$ , dass

$$\mathbb{P}(A_k) > 0 \quad \text{für jedes } k \geq k_0. \quad (22)$$

- Sei nun  $B_k \subset \Omega$  das Ereignis, dass sämtliche  $k$  Teilsegmente von  $L_k$  aktiviert sind, und (so wie bisher) bezeichne  $C_o : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  den aktivierten Cluster des Nullpunktes.

- Dann ergibt sich aus Lemma 2.4, dass

$$\{|C_o| < \infty\} \cap B_k \subset \{Y_k > 0\} \cap B_k \quad \text{bzw.} \quad \{|C_o| = \infty\} \cap B_k \supset \{Y_k = 0\} \cap B_k.$$

- Weil  $A_k$  und  $B_k$  unabhängig sind, ergibt sich hieraus und aus (22), dass für jedes  $k \geq k_0$

$$\mathbb{P}(\{|C_o| = \infty\} \cap B_k) \geq \mathbb{P}(A_k \cap B_k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_k)p^k > 0.$$

- Somit gilt also  $\theta_o(p) = \mathbb{P}(\{|C_o| = \infty\}) > 0$  für jedes  $p > 2/3$ , was gleichbedeutend mit  $p_c \leq 2/3$  ist.

### 2.3 Bond–Perkolation vs. Site–Perkolation

Wir kehren nun wieder zu dem allgemeinen Fall zurück und nehmen an, dass  $G = (V, E)$  ein beliebiger zusammenhängender und lokal endlicher Graph ist.

Um den Begriff der Site–Perkolation einzuführen, gehen wir ähnlich wie in Abschnitt 2.1.1 bei der Betrachtung von Bond–Perkolationen vor.

- Dabei bezeichnen wir jetzt den in Abschnitt 2.1.1 eingeführten Wahrscheinlichkeitsraum der (zufälligen) Bond–Konfigurationen mit  $(\Omega^b, \mathcal{A}^b, \mathbb{P}^b)$ .
- Außerdem schreiben wir
  - $x \xrightarrow{b} y$  anstelle von  $x \rightarrow y$  und  $x \xrightarrow{b} \infty$  anstelle von  $x \rightarrow \infty$ ,
  - $C_x^b$  anstelle von  $C_x$ ,
  - $\theta_x^b(\mathbf{p})$  bzw.  $\theta_x^b(p)$  anstelle von  $\theta_x(\mathbf{p})$  bzw.  $\theta_x(p)$ ,
  - und  $p_c^b$  bzw.  $p_{ec}^b$  anstelle von  $p_c$  bzw.  $p_{ec}$ .
- Analog hierzu verwenden wir in diesem Abschnitt die Schreibweise

$$p_c^b = \sup\{p \in [0, 1] : \theta_x^b(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] : \theta_x^b(p) > 0\}$$

bzw.

$$p_{ec}^b = \sup\{p \in [0, 1] : \chi_x^b(p) < \infty\} = \inf\{p \in [0, 1] : \chi_x^b(p) = \infty\},$$

wobei  $\chi_x^b(p) = \mathbb{E}|C_x^b|$ .

#### Definition

- Eine Funktion  $\omega : V \rightarrow \{0, 1\}$  heißt *Site–Konfiguration*, wobei wir die Schreibweise  $v \mapsto \omega_v$  verwenden, d.h.  $\omega_v = \omega(v)$  für jedes  $v \in V$ .
- Sei  $\Omega^s = \{0, 1\}^V$  die Familie aller Site–Konfigurationen. Dabei heißt ein Eckpunkt  $v \in V$  *aktiviert* in der Konfiguration  $\omega \in \Omega^s$  genau dann, wenn  $\omega_v = 1$ . Ein Pfad von  $v$  nach  $v'$  heißt *aktiviert*, wenn sämtliche Eckpunkte des Pfades aktiviert sind.
- Sei  $\mathcal{A}^s$  die kleinste  $\sigma$ –Algebra über  $\Omega^s$ , die die so genannten *Zylindermengen*

$$C(F, z) = \{\omega \in \Omega^s : \omega_f = z_f \text{ for all } f \in F\}$$

enthält, wobei  $F$  eine endliche Teilmenge von  $V$  ist und  $z \in \{0, 1\}^F$ .

- Sei  $\mathbf{p} = \{p_v : v \in V\}$  eine beliebige Wahrscheinlichkeitsfunktion über  $V$ , d.h., es gelte  $0 \leq p_v \leq 1$  für jedes  $v \in V$ . Außerdem sei  $\mathbb{P}^s : \mathcal{A}^s \rightarrow [0, 1]$  das (eindeutig bestimmte) Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass

$$\mathbb{P}^s(C(F, z)) = \prod_{\{f \in F : z_f = 1\}} p_f \prod_{\{f \in F : z_f = 0\}} (1 - p_f) \quad (23)$$

für jede endliche Teilmenge  $F \subset V$  und für jedes  $z \in \{0, 1\}^F$ .

**Beachte**

- Die  $(\mathcal{A}^s, \sigma_{\mathcal{F}})$ -messbare Zufallsvariable  $\Xi_{\mathbf{p}}^s : \Omega^s \rightarrow \mathcal{F}$ , wobei  $\Xi_{\mathbf{p}}^s(\omega) = \bigcup_{v \in V: \omega_v=1} v$  die Vereinigungsmenge der aktivierten Eckpunkte ist, kann dann als *zufälliges Punktmuster* aufgefasst werden, das über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega^s, \mathcal{A}^s, \mathbb{P}^s)$  gegeben ist.
- Wenn es ein  $p \in [0, 1]$  gibt, so dass  $p_v = p$  für alle  $v \in V$ , dann schreiben wir  $\Xi_p^s$  anstelle von  $\Xi_{\mathbf{p}}^s$ .

Auf die gleiche Weise wie Theorem 2.1 lässt sich das folgende *Kopplungstheorem* herleiten.

**Theorem 2.6** *Es gibt einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\tilde{\Omega}^s, \tilde{\mathcal{A}}^s, \tilde{\mathbb{P}}^s)$  und einen stochastischen Prozess  $\{\tilde{\Xi}_p^s, p \in [0, 1]\}$  über  $(\tilde{\Omega}^s, \tilde{\mathcal{A}}^s, \tilde{\mathbb{P}}^s)$  mit Werten in  $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$ , so dass  $\tilde{\Xi}_p^s \stackrel{D}{=} \Xi_p^s$  für jedes  $p \in [0, 1]$  und*

$$\tilde{\mathbb{P}}^s(\tilde{\Xi}_p^s \subset \tilde{\Xi}_{p'}^s) = 1 \quad \text{für beliebige } p, p' \in [0, 1] \text{ mit } p \leq p'. \quad (24)$$

**Beachte**

- Mit  $\{x \xrightarrow{s} y\} \subset \Omega^s$  bezeichnen wir nun das Ereignis, dass es einen aktivierten Pfad von  $x \in V$  nach  $y \in V$  gibt, so dass sämtliche Eckpunkte dieses Pfades aktiviert sind. Mit  $\mathbb{P}^s(x \xrightarrow{s} y)$  bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.
- Außerdem bezeichnet  $\{x \xrightarrow{s} \infty\} \subset \Omega^s$  das Ereignis, das es einen unendlichen aktivierten Pfad gibt, der in  $x \in V$  beginnt.
- Sei  $C_x^s = \{y \in V : x \xrightarrow{s} y\}$  der (zufällige) *aktive Cluster*, der den Eckpunkt  $x \in V$  enthält, d.h.,  $C_x^s$  ist die (zufällige) Menge aller derjenigen Eckpunkte  $y \in V$ , zu denen es einen Pfad bestehend aus aktivierten Eckpunkten gibt, und sei  $\theta_x^s(\mathbf{p})$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Cluster  $C_x^s$  unendlich ist, d.h.,

$$\theta_x^s(\mathbf{p}) = \mathbb{P}^s(|C_x^s| = \infty) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^s(x \xrightarrow{s} \infty). \quad (25)$$

- Wenn es ein  $p \in [0, 1]$  gibt, so dass  $p_v = p$  für alle  $v \in V$ , dann schreiben wir wiederum  $\theta_x^s(p)$  anstelle von  $\theta_x^s(\mathbf{p})$ .
- Aus Theorem 2.6 ergibt sich, dass

$$\theta_x^s(p) \leq \theta_x^s(p') \quad \text{für beliebige } p, p' \in [0, 1] \text{ mit } p \leq p'. \quad (26)$$

Wir vergleichen nun die (Bond-) kritischen Auswahlwahrscheinlichkeiten  $p_c^b$  und  $p_{ec}^b$  mit den entsprechenden (Site-) kritischen Auswahlwahrscheinlichkeiten

$$p_c^s = \sup\{p \in [0, 1] : \theta_x^s(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] : \theta_x^s(p) > 0\}$$

und

$$p_{ec}^s = \sup\{p \in [0, 1] : \chi_x^s(p) < \infty\} = \inf\{p \in [0, 1] : \chi_x^s(p) = \infty\},$$

wobei  $\chi_x^s(p) = \mathbb{E}|C_x^s|$ .

**Theorem 2.7** *Es gilt  $p_c^s \geq p_c^b$  und  $p_{ec}^s \geq p_{ec}^b$ .*

**Beweis**

- Um die Behauptung zu beweisen, ist die folgende Ungleichung nützlich: Für beliebige  $x \in V$ ,  $n \geq 1$  und  $p \in (0, 1)$  gilt

$$\mathbb{P}^s(|C_x^s| \geq n) \leq p \mathbb{P}^b(|C_x^b| \geq n). \quad (27)$$

– Hieraus ergibt sich, dass

$$\theta_x^s(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^s(|C_x^s| \geq n) \leq p \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^b(|C_x^b| \geq n) = p \theta_x^b(p).$$

- Aus  $\theta_x^b(p) = 0$  folgt somit, dass  $\theta_x^s(p) = 0$ . Dies impliziert, dass  $p_c^s \geq p_c^b$ .
- Außerdem ergibt sich aus (27), dass

$$\chi_x^s(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^s(|C_x^s| \geq n) \leq p \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^b(|C_x^b| \geq n) = p \chi_x^b(p).$$

– Aus  $\chi_x^b(p) < \infty$  folgt somit, dass  $\chi_x^s(p) < \infty$ . Dies impliziert, dass  $p_{ec}^s \geq p_{ec}^b$ .

- Um die Gültigkeit von (27) zu zeigen, ist es hinreichend die folgende (äquivalente) Ungleichung zu beweisen: Für beliebige  $x \in V$ ,  $n \geq 1$  und  $p \in (0, 1)$  gilt

$$\mathbb{P}^s(|C_x^s| \geq n \mid x \text{ ist aktiviert}) \leq \mathbb{P}^b(|C_x^b| \geq n). \quad (28)$$

- Hierfür betrachten wir den endlichen Graph  $G_{x,n} = (V_{x,n}, E_{x,n})$  von  $G = (V, E)$ , wobei
  - $V_{x,n}$  die Menge derjenigen Eckpunkte in  $V$  bezeichnet, die durch einen Pfad mit  $x$  verbunden sind, dessen Länge nicht größer als  $n$  ist,
  - und  $E_{x,n} = E \cap V_{x,n}^2$ .
- Beachte. Das Ereignis  $\{|C_x^s| \geq n\}$  hängt nur von den Zuständen der Eckpunkte des endlichen Graphen  $G_{x,n} = (V_{x,n}, E_{x,n})$  ab.
- Unter der Annahme, dass der Eckpunkt  $x$  aktiviert ist, lässt sich der (zufällige) aktive Cluster  $C_x^s = \{y \in V_{x,n} : x \xrightarrow{s} y\}$ , der den Eckpunkt  $x \in V$  enthält, wie folgt darstellen.
- Dabei konstruieren wir rekursiv eine zufällige Folge  $\mathcal{T} = (R_i, D_i, U_i)_{i=1}^{\ell}$  von Zerlegungen der Eckpunkt-Menge  $V_{x,n}$  in jeweils drei Teilmengen, so dass  $R_{\ell} = C_x^s$ .
  - Sei  $R_1 = \{x\}$ ,  $U_1 = V_{x,n} \setminus \{x\}$  und  $D_1 = \emptyset$ .
  - Sei  $(R_i, D_i, U_i)$  für ein  $i \geq 1$  gegeben. Wenn es keine  $R_i - U_i$  - Kante gibt, dann setzen wir  $\ell = i$  und die Konstruktion ist beendet.
  - Ansonsten wählen wir zufällig eine Kante  $e_i = (y_i, z_i)$ , so dass  $y_i \in R_i$  und  $z_i \in U_i$ . Dabei setzen wir  $U_{i+1} = U_i \setminus \{z_i\}$ .
  - Außerdem prüfen wir, ob  $z_i$  aktiviert ist. Wenn dies so ist, dann setzen wir,  $R_{i+1} = R_i \cup \{z_i\}$ . Ansonsten setzen wir  $D_{i+1} = D_i \cup \{z_i\}$  und  $R_{i+1} = R_i$ .
- Beachte. Die rekursive Konstruktion terminiert nach endlich vielen Schritten, weil  $V_{x,n}$  eine endliche Menge ist.

- Für jedes  $i = 1, \dots, \ell$  ist  $R_i$  eine zusammenhängende Menge von aktivierten Eckpunkten, und keiner der Eckpunkte in  $D_i$  ist aktiviert.
- Weil außerdem keiner der Eckpunkte in  $R_\ell$  einen Nachbarn in  $U_\ell = V_{x,n} \setminus (R_\ell \cup D_\ell)$  hat, gilt  $R_\ell = C_x^s$ .
- Auf analoge Weise konstruieren wir rekursiv eine zufällige Folge  $\mathcal{T}' = (R'_i, D'_i, U'_i)_{i=1}^{\ell'}$  von Zerlegungen der Eckpunkt-Menge  $V_{x,n}$  in jeweils drei Teilmengen, so dass  $R'_{\ell'} \subset C_x^b$ .
  - Der einzige Unterschied zwischen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  besteht darin, dass für eine zufällig ausgewählte Kante  $e_i = (y_i, z_i)$  mit  $y_i \in R_i$  und  $z_i \in U_i$  geprüft wird, ob die Kante  $e_i$  aktiviert ist.
  - Weil beide Arten von Prüfereignissen jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit  $p$  eintreten, sind die zufälligen Folgen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  identisch verteilt.
  - Insbesondere besitzen somit die Zufallsvariablen  $|C_x^s| = |R_\ell|$  und  $|R'_{\ell'}|$  die gleiche Verteilung.
  - Weil außerdem offenbar  $|R'_{\ell'}| \leq |C_x^b|$  gilt, ergibt sich hieraus die Gültigkeit von (28).

### Beachte

- Es ist nicht schwierig, Graphen zu finden, so dass  $p_c^s > p_c^b$  bzw.  $p_{ec}^s > p_{ec}^b$  gilt. Ein einfaches Beispiel  $G = (V, E)$  hierfür lässt sich wie folgt konstruieren.
  - Wir betrachten einen unendlichen (sich nicht selbst schneidenden) Pfad. Die Menge  $V$  der Eckpunkte von  $G$  bzw. das Kantensystem  $E$  ergeben sich, indem für jedes  $k \geq 1$  die  $k$ -te Kante des Pfades durch einen vollständigen Graph ersetzt wird, der aus  $2^k$  Eckpunkten besteht.
  - Dann kann man zeigen, dass sogar  $p_c^s = 1$  und  $p_c^b = 0$  gilt.
- In manchen Fällen kann man auch obere Schranken für die (Site-) kritischen Auswahlwahrscheinlichkeiten  $p_c^s$  und  $p_{ec}^s$  angeben, und zwar durch geeignet gewählte Funktionen von  $p_c^b$  bzw.  $p_{ec}^b$ .

Die folgende obere Schranke für  $p_c^s$  lässt sich auf einfache Weise herleiten.

**Theorem 2.8** *Sei  $G = (V, E)$  ein unendlicher zusammenhängender Graph mit beschränktem Knotengrad, d.h.  $\Delta = \sup_{v \in V} \gamma(v) < \infty$ . Dann gilt*

$$p_c^s \leq 1 - \left(1 - \sqrt{p_c^b}\right)^\Delta. \quad (29)$$

### Beweis

- Sei  $r \in (0, 1)$  eine beliebige Zahl, und sei  $\{X_{xy}, X_{yx} : (x, y) \in E\}$  eine Familie von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_{xy} = 1) = \mathbb{P}(X_{yx} = 1) = r \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_{xy} = 0) = \mathbb{P}(X_{yx} = 0) = 1 - r.$$

- Wir sagen, dass der Eckpunkt  $x \in V$  aktiviert ist, wenn es einen Eckpunkt  $y \in V$  gibt, so dass  $(x, y) \in E$  und  $X_{xy} = 1$ .
- Dabei lässt sich die Aktivierungswahrscheinlichkeit  $1 - (1 - r)^{\gamma(x)}$  des Eckpunktes  $x \in V$  wie folgt nach oben abschätzen:

$$1 - (1 - r)^{\gamma(x)} \leq 1 - (1 - r)^\Delta. \quad (30)$$

- Außerdem sagen wir, dass die Kante  $(x, y) \in E$  aktiviert ist, wenn  $X_{xy} = X_{yx} = 1$ , d.h., die Aktivierungswahrscheinlichkeit einer Kante ist gegeben durch  $r^2$ .
- Es ist klar, dass jeder aktive Cluster bezüglich der Bond-Perkolation in einem aktiven Cluster bezüglich der Site-Perkolation enthalten ist.
- Wenn nun  $r \in (0, 1)$  so gewählt wird, dass  $r^2 > p_c^b$ , dann impliziert dies und (30), dass  $p_c^s \leq 1 - (1 - r)^\Delta$  und somit

$$p_c^s \leq 1 - \left(1 - \sqrt{p_c^b}\right)^\Delta.$$

### Beachte

- Die obere Schranke in (29) kann verbessert werden, denn unter den Bedingungen von Theorem 2.8 gilt sogar

$$p_c^s \leq 1 - (1 - p_c^b)^{\Delta-1} \quad \text{und} \quad p_{ec}^s \leq 1 - (1 - p_{ec}^b)^{\Delta-1}. \quad (31)$$

- Zur Herleitung von (31) können ähnliche Techniken wie im Beweis von Theorem 2.7 verwendet werden, vgl. Bollobás und Riordan (2009), S. 22–24.

## 2.4 Bond-Perkolation in $\mathbb{Z}^2$

- In diesem Abschnitt betrachten wir das quadratische Gitter  $G = (V, E)$  in  $\mathbb{R}^2$ , d.h.,

$$V = \mathbb{Z}^2 \quad \text{und} \quad E = \{(v, v') \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : |v - v'| = 1\}. \quad (32)$$

- Für diesen Fall werden wir die Aussage von Theorem 2.5 verschärfen und zeigen, dass die (Bond-) kritische Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_c$  gegeben ist durch  $p_c = 1/2$ .
- Hierfür benötigen wir eine Reihe von mathematischen Hilfsmitteln, mit deren Herleitung wir beginnen.

### 2.4.1 Korrelationsungleichung

- Wir betrachten den folgenden (endlichen) Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ , wobei  $n \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl ist.
  - Sei  $\Omega_n = \{0, 1\}^n$  die Menge aller 0-1-Folgen der Länge  $n$ .

- Außerdem sei  $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}(\Omega_n)$  die Familie aller Teilmengen von  $\Omega_n$ .
- Für beliebige  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  mit  $0 \leq p_1, \dots, p_n \leq 1$  betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_n : \mathcal{A}_n \rightarrow [0, 1]$ , das für jedes  $A \in \mathcal{A}_n$  gegeben ist durch

$$\mathbb{P}_n(A) = \sum_{a=(a_1, \dots, a_n) \in A} \prod_{i:a_i=1} p_i \prod_{i:a_i=0} (1-p_i). \quad (33)$$

- Wenn keine Verwechslungen möglich sind, dann schreiben wir kurz  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  anstelle von  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ .
- Beachte. In  $\Omega$  lässt sich eine *Halbordnung* einführen: Für  $a, b \in \Omega$  mit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_n)$  schreiben wir  $a \leq b$ , wenn  $a_i \leq b_i$  für jedes  $i = 1, \dots, n$ .
  - Eine Teilmenge  $A \subset \Omega$  heißt (monoton) wachsend (bzw. ein *up-set*), wenn aus  $a, b \in \Omega$ ,  $a \in A$  und  $a \leq b$  folgt, dass  $b \in A$ .
  - Analog heißt eine Teilmenge  $A \subset \Omega$  heißt (monoton) fallend (bzw. ein *down-set*), wenn aus  $a, b \in \Omega$ ,  $a \in A$  und  $a \geq b$  folgt, dass  $b \in A$ .
  - Für jedes  $A \in \mathcal{A}$  und  $j = 0, 1$  sei  $A_j = \{(a_1, \dots, a_{n-1}) : (a_1, \dots, a_{n-1}, j) \in A\} \subset \Omega_{n-1}$ .
  - Es ist klar, dass  $A_0 \subset A_1$ , wenn  $A$  ein up-set ist, bzw.  $A_1 \subset A_0$ , wenn  $A$  ein down-set ist.
  - Man kann sich leicht überlegen, dass

$$\mathbb{P}_n(A) = (1-p_n)\mathbb{P}_{n-1}(A_0) + p_n\mathbb{P}_{n-1}(A_1) \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{A}_n. \quad (34)$$

Die folgende Korrelationsungleichung wird in der Literatur das *Lemma von Harris* genannt.

**Lemma 2.5** *Seien  $A, B \in \mathcal{A}$  beliebige Teilmengen von  $\Omega$ .*

- *Wenn beide Teilmengen  $A$  und  $B$  up-sets bzw. down-sets sind, dann gilt*

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B). \quad (35)$$

- *Wenn  $A$  ein up-set und  $B$  ein down-set ist, dann gilt*

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B). \quad (36)$$

### Beweis

- Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von (35) mit vollständiger Induktion bezüglich  $n$ .
  - Für  $n = 0$  und  $n = 1$  gilt die Ungleichung (35) offensichtlich.
  - Wir nehmen nun an, dass  $n \geq 2$  und dass (35) für  $n - 1$  gilt.

- Seien  $A$  und  $B$  entweder beide up-sets oder beide down-sets. Dann gilt entweder  $A_0 \subset A_1$  und  $B_0 \subset B_1$ , oder  $A_0 \supset A_1$  und  $B_0 \supset B_1$ .
- Wegen der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen gilt also in beiden Fällen, dass

$$(\mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1)) (\mathbb{P}(B_0) - \mathbb{P}(B_1)) \geq 0. \quad (37)$$

- Wegen (34) ergibt sich hieraus und aus der Induktionsannahme, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &\stackrel{(34)}{=} (1 - p_n) \mathbb{P}(A_0 \cap B_0) + p_n \mathbb{P}(A_1 \cap B_1) \\ &\stackrel{\text{Ind.-annahme}}{\geq} (1 - p_n) \mathbb{P}(A_0) \mathbb{P}(B_0) + p_n \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(B_1) \\ &\stackrel{(37)}{\geq} (1 - p_n) \mathbb{P}(A_0) \mathbb{P}(B_0) + p_n \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(B_1) \\ &\quad - (\mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1)) (\mathbb{P}(B_0) - \mathbb{P}(B_1)) p_n (1 - p_n) \\ &= ((1 - p_n) \mathbb{P}(A_0) + p_n \mathbb{P}(A_1)) ((1 - p_n) \mathbb{P}(B_0) + p_n \mathbb{P}(B_1)) \\ &\stackrel{(34)}{=} \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

- Sei nun  $A$  ein up-set und  $B$  ein down-set. Dann wenden wir die Ungleichung (35) auf die up-sets  $A$  und  $B^c = \Omega \setminus B$  an und erhalten, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^c) \\ &\stackrel{(35)}{\leq} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B^c) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) (1 - \mathbb{P}(B)) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

**Korollar 2.1** *Sei  $\ell \geq 2$  eine beliebige natürliche Zahl, und seien  $A_1, \dots, A_\ell \in \mathcal{A}$  beliebige Teilmengen von  $\Omega$ .*

- *Wenn sämtliche Teilmengen  $A_1, \dots, A_\ell$  up-sets bzw. down-sets sind, dann gilt*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\ell) \geq \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_\ell). \quad (38)$$

- *Wenn sämtliche Teilmengen  $A_1, \dots, A_\ell$  up-sets sind, dann gilt außerdem*

$$\mathbb{P}(A_i) \geq 1 - (1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_\ell))^{1/\ell} \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, \ell\}. \quad (39)$$

### Beweis

- Weil der Durchschnitt zweier up-sets bzw. down-sets erneut ein up-set bzw. down-set ist, ergibt sich die Gültigkeit von (38) unmittelbar aus Lemma 2.5.
- Wenn  $A_1, \dots, A_\ell$  up-sets sind, dann sind die Komplemente  $A_1^c, \dots, A_\ell^c$  down-sets und wegen (38) gilt somit

$$\prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_i^c) \leq \mathbb{P}(A_1^c \cap \dots \cap A_\ell^c) = \mathbb{P}(A^c),$$

wobei  $A = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$ .

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\mathbb{P}(A_i^c) \leq (\mathbb{P}(A^c))^{1/\ell} \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, \ell\}$$

bzw.

$$\mathbb{P}(A_i) \geq 1 - \left(1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_\ell)\right)^{1/\ell} \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

**Beachte** Aus (39) ergibt sich, dass für up-sets  $A_1, \dots, A_\ell$ , deren Vereinigung  $A_1 \cup \dots \cup A_\ell$  eine hohe Wahrscheinlichkeit hat, auch eines der (Einzel-) Ereignisse  $A_i$  eine hohe Wahrscheinlichkeit besitzen muss.

### 2.4.2 Abschätzung von Perkulationswahrscheinlichkeiten in Rechtecken

- Seien  $m, n \geq 2$  beliebige natürliche Zahlen. Mit  $R = [m] \times [n]$  bezeichnen wir den Teilgraph  $G_R = (V_R, E_R)$  des quadratischen Gitters  $G = (V, E)$ ,
  - der gegeben ist durch

$$V_R = \mathbb{Z}^2 \cap [1, m] \times [1, n] \quad \text{und} \quad E_R = \{(v, v') \in V_R \times V_R : |v - v'| = 1\}$$

- und der  $m \times n$ -Rechteck genannt wird und  $mn$  Eckpunkte bzw.  $2mn - m - n$  Kanten hat.

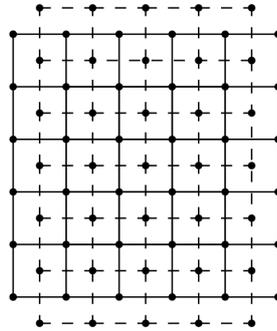


Abbildung 12: Horizontales duales Rechteck

- Mit  $R^h = [1 + 1/2, m - 1/2] \times [1 - 1/2, n + 1/2]$  bezeichnen wir den folgenden Teilgraph  $G_{R^h}^* = (V_{R^h}^*, E_{R^h}^*)$  des dualen quadratischen Gitters  $G^* = (V^*, E^*)$ , genannt *horizontales duales Rechteck*, vgl. Abbildung 12,

- wobei  $V_{R^h}^* = (\mathbb{Z} + 1/2)^2 \cap [1 + 1/2, m - 1/2] \times [1 - 1/2, n + 1/2]$  bzw.

$$E_{R^h}^* = \{(v, v') \in V_{R^h}^* \times V_{R^h}^* : |v - v'| = 1\}$$

- und jeder horizontalen Kante  $e \in E_R$  von  $R$  eine vertikale Kante  $e^* \in V_{R^h}^*$  in  $R^h$  entspricht.

- Beachte. Wenn  $R$  ein  $m \times n$ -Rechteck ist, dann ist  $R^h$  ein  $(m-1) \times (n+1)$ -Rechteck.
- Analog bezeichnen wir mit  $R^v = [1-1/2, m+1/2, 1+1/2, m-1/2]$  den folgenden Teilgraph  $G_{R^v}^* = (V_{R^v}^*, E_{R^v}^*)$  des dualen quadratischen Gitters  $G^* = (V^*, E^*)$ , genannt *vertikales duales Rechteck*, vgl. Abbildung 13, wobei

$$V_{R^v}^* = (\mathbb{Z} + 1/2)^2 \cap [1-1/2, m+1/2] \times [1+1/2, n-1/2]$$

und

$$E_{R^v}^* = \{(v, v') \in V_{R^v}^* \times V_{R^v}^* : |v - v'| = 1\}.$$

- Beachte.
  - Wenn  $R$  ein  $m \times n$ -Rechteck ist, dann ist  $R^v$  ein  $(m+1) \times (n-1)$ -Rechteck.
  - Offenbar gilt  $(R^h)^v = R = (R^v)^h$ .

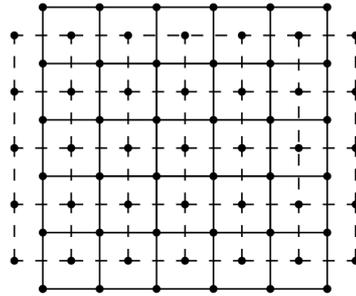


Abbildung 13: Vertikales duales Rechteck

- Außerdem betrachten wir (zufällige) Bond-Konfigurationen in  $G$  bzw.  $G^*$ .
  - Jeder Bond-Konfiguration  $\omega : E \rightarrow \{0, 1\}$  des quadratischen Gitters  $G = (V, E)$  entspricht eine Bond-Konfiguration  $\omega^* : E^* \rightarrow \{0, 1\}$  des dualen quadratischen Gitters  $G^* = (V^*, E^*)$ , wobei  $\omega_e = 1$  genau dann, wenn  $\omega_{e^*}^* = 0$ .
  - Jedem unendlichen aktiven Cluster des quadratischen Gitters  $G = (V, E)$  bezüglich der Auswahlwahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$  entspricht also ein unendlicher aktiver Cluster des dualen quadratischen Gitters  $G^* = (V^*, E^*)$  bezüglich der Auswahlwahrscheinlichkeit  $1-p \in (0, 1)$ .
  - Sei  $H(R) \subset \Omega$  die Menge aller derjenigen Bond-Konfigurationen in  $G$ , für die es einen aktivierten Pfad gibt, der den linken Rand von  $R$  mit dem rechten Rand von  $R$  verbindet.
  - Außerdem sei  $V(R) \subset \Omega$  die Menge aller derjenigen Bond-Konfigurationen in  $G$ , für die es einen aktivierten Pfad gibt, der den oberen Rand von  $R$  mit dem unteren Rand von  $R$  verbindet.
  - Analog sei  $V(R^h) \subset \Omega^*$  die Menge aller derjenigen Bond-Konfigurationen in  $G^*$ , für die es einen aktivierten Pfad gibt, der den oberen Rand von  $R^h$  mit dem unteren Rand von  $R^h$  verbindet.

**Lemma 2.6** Für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt entweder  $\omega \in H(R)$  oder  $\omega^* \in V(R^h)$ .

Einen *Beweis* dieser intuitiv plausiblen Aussage findet man in Bollobás und Riordan (2009), siehe S. 52–54, vgl. auch die Abbildung 14.

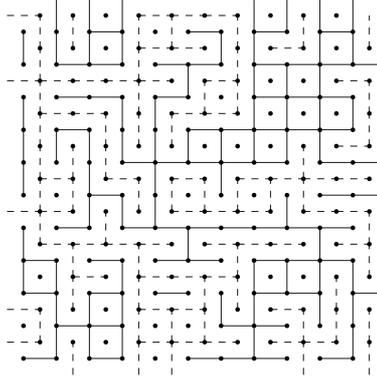


Abbildung 14: Konfiguration von aktivierten Bonds in  $R$  bzw. im horizontalen dualen Rechteck  $R^h$

**Korollar 2.2** Sei  $R$  ein  $m \times n$ -Rechteck, wobei  $m, n \geq 2$  beliebige natürliche Zahlen sind.

- Für jedes  $p \in (0, 1)$  gilt dann

$$\mathbb{P}_p(H(R)) + \mathbb{P}_{1-p}^*(V(R^h)) = 1. \quad (40)$$

- Außerdem gilt

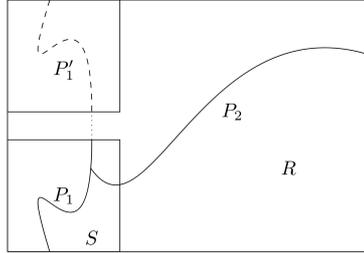
$$\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) = \frac{1}{2}, \text{ wenn } m = n + 1, \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_{1/2}(H(R)) \geq \frac{1}{2}, \text{ wenn } m = n. \quad (41)$$

**Beweis**

- Die Gültigkeit von (40) ergibt sich unmittelbar aus Lemma 2.6, denn die Ereignisse  $\{\omega \in \Omega : \omega \in H(R)\}$  und  $\{\omega \in \Omega : \omega^* \in V(R^h)\}$  bilden eine (messbare) Zerlegung von  $\Omega$  in zwei disjunkte Teilmengen.
- Wenn  $R$  ein  $(n + 1) \times n$ -Rechteck ist, dann ist  $R^h$  ein  $n \times (n + 1)$ -Rechteck, und für  $p = 1/2$  gilt, dass

$$\mathbb{P}_{1/2}(\omega \in \Omega : \omega \in H(R)) = \mathbb{P}_{1/2}^*(\omega^* \in \Omega^* : \omega^* \in V(R^h)).$$

- Hieraus und aus (40) ergibt sich die erste Gleichheit in (41).
- Sei  $R$  ein  $(n + 1) \times n$ -Rechteck und sei  $R'$  ein  $n \times n$ -Rechteck, so dass  $R' \subset R$ .
- Dann enthält jeder horizontale Perkolationspfad in  $R$  einen horizontalen Perkolationspfad in  $R'$ , d.h., es gilt  $H(R') \supset H(R)$  und somit  $\mathbb{P}_{1/2}(H(R')) \geq \mathbb{P}_{1/2}(H(R)) = \frac{1}{2}$ .

Abbildung 15: Schematische Darstellung des Ereignisses  $X(R, S)$ 

Außerdem benötigen wir das folgende Hilfsergebnis. Dabei betrachten wir für beliebige  $m, n \geq 2$  mit  $m \geq n$  das  $m \times (2n)$ -Rechteck  $R = [m] \times [2n]$  und das  $n \times n$ -Quadrat  $S = [n] \times [n]$ , vgl. Abbildung 15.

**Lemma 2.7**

- Sei  $X(R, S) \subset \Omega$  die Menge aller derjenigen Bond-Konfigurationen in  $G$ , für die es aktivierte Pfade  $P_1$  und  $P_2$  gibt, so dass
  - $P_1$  den unteren Rand von  $S$  mit dem oberen Rand von  $S$  verbindet und
  - $P_2$  von einem Eckpunkt des Pfades  $P_1$  zum rechten Rand von  $R$  verläuft.
- Für jedes  $p \in [0, 1]$  gilt dann

$$\mathbb{P}_p(X(R, S)) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_p(H(R)) \mathbb{P}_p(V(S)). \quad (42)$$

**Beweis**

- Wir führen zunächst einige zusätzliche Bezeichnungen ein, die im weiteren Verlauf des Beweises nützlich sein werden, vgl. auch die Abbildung 15.
  - Sei

$$LV(S) = \begin{cases} P_1, & \text{wenn } P_1 \text{ der am meisten links liegende vertikale} \\ & \text{Perkolationspfad in } S \text{ ist,} \\ \emptyset, & \text{wenn es keinen vertikalen Perkolationspfad in } S \text{ gibt.} \end{cases}$$

- $P_1'$  die Spiegelung von  $P_1$  an der horizontalen Symmetrieachse von  $R$ ,
- $\tilde{P}_1 = P_1 \cup P_1' \cup \{\text{vertikale Kante, die } P_1 \text{ und } P_1' \text{ verbindet}\}$ ,
- und  $R(P_1)$  sei derjenige Teil von  $R$ , der rechts von  $\tilde{P}_1$  liegt.
- Außerdem bezeichne  $Y(P_1)$  das Ereignis, dass es in  $R(P_1)$  einen aktivierten Pfad gibt, der  $\tilde{P}_1$  mit dem rechten Rand von  $R$  verbindet.
- Analog  $Z(P_1)$  das Ereignis, dass es in  $R(P_1)$  einen aktivierten Pfad gibt, der  $P_1$  mit dem rechten Rand von  $R$  verbindet.

- Das Ereignis  $Y(P_1)$  ist die Vereinigung von zwei gleichwahrscheinlichen Ereignissen, die beide die gleiche  $\mathbb{P}_p$ -Wahrscheinlichkeit wie  $Z(P_1)$  haben.
  - Deshalb ergibt sich aus der Subadditivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen, dass

$$\mathbb{P}_p(Y(P_1)) \leq 2\mathbb{P}_p(Z(P_1)).$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\mathbb{P}_p(Z(P_1)) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_p(Y(P_1)) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_p(H(R)). \quad (43)$$

- Für jeden (fest vorgegebenen) Pfad  $P_1$ , der den unteren Rand von  $S$  mit dem oberen Rand von  $S$  verbindet,
  - hängt das Ereignis  $\{LV(S) = P_1\}$  nur von der Aktivierung derjenigen Kanten in  $S$  ab, die links von  $P_1$  liegen (und zwar einschließlich der Kanten von  $P_1$ ),
  - und das Ereignis  $Z(P_1)$  hängt nur von der Aktivierung der Kanten in  $S$  ab, die rechts von  $P_1$  liegen (ausschließlich der Kanten von  $P_1$ ).
  - Hieraus folgt, dass die Ereignisse  $\{LV(S) = P_1\}$  und  $Z(P_1)$  unabhängig sind, d.h.,

$$\mathbb{P}_p(Z(P_1) \mid LV(S) = P_1) = \mathbb{P}_p(Z(P_1)). \quad (44)$$

- Weil außerdem  $X(R, S) \supset \bigcup_{P_1} (\{LV(S) = P_1\} \cap Z(P_1))$ , ergibt sich insgesamt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(X(R, S)) &\geq \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{P_1} (\{LV(S) = P_1\} \cap Z(P_1))\right) \\ &= \sum_{P_1} \mathbb{P}_p(\{LV(S) = P_1\} \cap Z(P_1)) \\ &= \sum_{P_1} \mathbb{P}_p(Z(P_1) \mid LV(S) = P_1) \mathbb{P}_p(LP(S) = P_1) \\ &\stackrel{(44)}{=} \sum_{P_1} \mathbb{P}_p(Z(P_1)) \mathbb{P}_p(LP(S) = P_1) \\ &\stackrel{(43)}{\geq} \frac{1}{2} \mathbb{P}_p(H(R)) \sum_{P_1} \mathbb{P}_p(LP(S) = P_1) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}_p(H(R)) \mathbb{P}_p(V(S)). \end{aligned}$$

- Damit ist (42) bewiesen.

### Beachte

- Im Beweis von Lemma 2.7 kann das  $n \times n$ -Quadrat durch ein beliebiges  $r \times n$ -Rechteck mit  $2 \leq r \leq m$  ersetzt werden. In Verallgemeinerung von (42) ergibt sich dann die Ungleichung

$$\mathbb{P}_p(X(R, R')) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_p(H(R)) \mathbb{P}_p(V(R')), \quad (45)$$

wobei  $R = [m] \times [2n]$  und  $R' = [r] \times [n]$ .

- Sei nun  $p \in [0, 1]$  und sei  $R = [m] \times [n]$  ein beliebiges  $m \times n$ -Rechteck.

- Für die  $\mathbb{P}_p$ -Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $H(R)$ , dass es einen aktivierten Pfad gibt, der den linken Rand von  $R$  mit dem rechten Rand von  $R$  verbindet, verwenden wir im folgenden die (Kurz-) Schreibweise  $h_p(m, n) = \mathbb{P}_p(H(R))$ .
- Insbesondere setzen wir  $h(m, n) = h_{1/2}(m, n)$ . Für jedes  $n \geq 2$  ergibt sich dann aus Formel (41) in Korollar 2.2, dass

$$h(n, n) \geq h(n+1, n) = \frac{1}{2}. \quad (46)$$

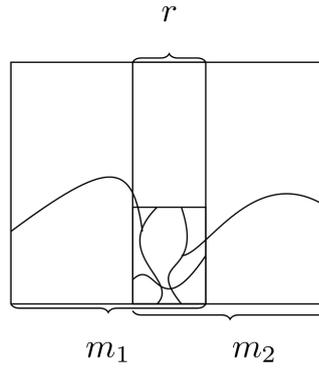


Abbildung 16: Horizontaler Pfad in der Vereinigungsmenge zweier Rechtecke, deren Durchschnitt ein  $r \times 2n$ -Rechteck ist

Mit Hilfe von (45) ergibt sich aus der Korrelationsungleichung (38) die folgende Ungleichung für  $h(m, n)$ , die sich im weiteren als nützlich erweisen wird.

**Lemma 2.8** Für beliebige  $m_1, m_2, n, r \geq 2$  mit  $m_1, m_2 \geq n \geq r$  gilt

$$h(m_1 + m_2 - r, 2n) \geq \frac{1}{4} h(m_1, 2n) h(m_2, 2n) h^2(n, r) h(r, n). \quad (47)$$

**Beweis**

- Seien  $R_1 = [m_1] \times [2n]$  und  $R_2 = [m_2] \times [2n]$  zwei Rechtecke, deren Durchschnitt ein  $r \times 2n$ -Rechteck ist.

– Dann gilt

$$H(R_1 \cup R_2) \supset X(R_1, R') \cap X(R_2, R') \cap H(R'),$$

wobei  $R'$  das  $r \times n$ -Rechteck ist, das in der rechten unteren Ecke von  $R_1$  bzw. in der linken unteren Ecke von  $R_2$  liegt, vgl. Abbildung 16.

– Hieraus ergibt sich, dass

$$\mathbb{P}_{1/2}(H(R_1 \cup R_2)) \geq \mathbb{P}_{1/2}(X(R_1, R') \cap X(R_2, R') \cap H(R')). \quad (48)$$

- Weil die Ereignisse  $X(R_1, R')$ ,  $X(R_2, R')$  und  $H(R')$  up-sets sind, ergibt sich aus der Korrelationsungleichung (38), dass

$$\mathbb{P}_{1/2}(X(R_1, R') \cap X(R_2, R') \cap H(R')) \geq \mathbb{P}_{1/2}(X(R_1, R')) \mathbb{P}_{1/2}(X(R_2, R')) \mathbb{P}_{1/2}(H(R')). \quad (49)$$

- Insgesamt ergibt sich somit, dass

$$\begin{aligned}
h(m_1 + m_2 - r, 2n) &= \mathbb{P}_{1/2}(H(R_1 \cup R_2)) \\
&\stackrel{(48),(49)}{\geq} \mathbb{P}_{1/2}(X(R_1, R')) \mathbb{P}_{1/2}(X(R_2, R')) \mathbb{P}_{1/2}(H(R')) \\
&\stackrel{(42)}{\geq} \frac{1}{4} \mathbb{P}_{1/2}(H(R_1)) \mathbb{P}_{1/2}(H(R_2)) \mathbb{P}_{1/2}^2(V(R')) \mathbb{P}_{1/2}(H(R')) \\
&= \frac{1}{4} h(m_1, 2n) h(m_2, 2n) h^2(n, r) h(r, n).
\end{aligned}$$

- Damit ist (47) bewiesen.

Aus Lemma 2.8 ergeben sich die folgenden unteren Schranken für  $h(m, n)$ , wenn in (47) geeignet gewählter Werte für  $m_1$ ,  $m_2$  und  $r$  eingesetzt werden.

**Korollar 2.3** *Für beliebige  $n \geq 3$  gilt*

$$h(3n + 3, 2n) \geq 2^{-7}, \quad h(5n + 7, 2n) \geq 2^{-19} \quad \text{und} \quad h(6n + 9, 2n) \geq 2^{-25}. \quad (50)$$

**Beweis**

- Für  $m_1 = m_2 = 2n + 1$  und  $r = n - 1$  ergibt sich aus (46) und (47), dass

$$\begin{aligned}
h(3n + 3, 2n) &\stackrel{(47)}{\geq} \frac{1}{4} h(2n + 1, 2n) h(2n + 1, 2n) h^2(n, n - 1) h(n - 1, n) \\
&\geq \frac{1}{4} h(2n + 1, 2n) h(2n + 1, 2n) h^2(n, n - 1) h(n, n) \\
&\stackrel{(46)}{\geq} 2^{-7}.
\end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich für  $m_1 = m_2 = 3n + 3$  und  $r = n - 1$ , dass

$$\begin{aligned}
h(5n + 7, 2n) &\stackrel{(47)}{\geq} \frac{1}{4} h^2(3n + 2, 2n) h^2(n, n - 1) h(n - 1, n) \\
&\geq \frac{1}{4} 2^{-14} h^2(n, n - 1) h(n, n) \\
&\stackrel{(46)}{\geq} 2^{-19}.
\end{aligned}$$

- Schließlich ergibt sich für  $m_1 = 5n + 7$ ,  $m_2 = 2n + 1$  und  $r = n - 1$ , dass

$$\begin{aligned}
h(6n + 9, 2n) &\stackrel{(47)}{\geq} \frac{1}{4} h(5n + 7, 2n) h(2n + 1, 2n) h^2(n, n - 1) h(n - 1, n) \\
&\geq \frac{1}{4} 2^{-19} h(2n + 1, 2n) h^2(n, n - 1) h(n, n) \\
&\stackrel{(46)}{\geq} 2^{-25}.
\end{aligned}$$

Analog zu Lemma 2.8 lässt sich die folgende Ungleichung für  $h(m, n)$  herleiten.

**Lemma 2.9** Für beliebige  $m_1, m_2, n \geq 2$  mit  $m_1, m_2 \geq 2n$  gilt

$$h(m_1 + m_2 - 2n, 2n) \geq \frac{1}{2} h(m_1, 2n) h(m_2, 2n). \quad (51)$$

**Beweis**

- Wir betrachten ein  $m_1 \times (2n)$ -Rechteck und ein  $m_2 \times (2n)$ -Rechteck, deren Durchschnitt ein  $(2n) \times (2n)$ -Quadrat ist, vgl. Abbildung 17.
- Genauso wie im Beweis von Lemma 2.8 ergibt sich dann aus der Korrelationsungleichung (38), dass

$$h(m_1 + m_2 - 2n, 2n) \geq h(m_1, 2n) h(2n, 2n) h(m_2, 2n).$$

- Wegen  $h(2n, 2n) \geq 1/2$  (vgl. Korollar 2.2) ergibt sich hieraus die Behauptung.

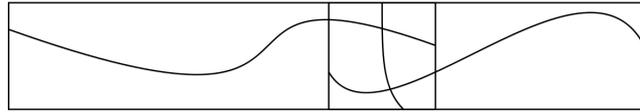


Abbildung 17: Horizontaler Pfad in der Vereinigungsmenge zweier Rechtecke, deren Durchschnitt ein  $2n \times 2n$ -Quadrat ist

**Korollar 2.4** Für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  gibt es eine Konstante  $h_k > 0$ , so dass

$$h(kn, n) \geq h_k \quad \text{für jedes } n \geq 2. \quad (52)$$

**Beweis**

- Für  $m_1 = m$  und  $m_2 = 3n$  ergibt sich aus (50) und (51), dass

$$h(m + n, 2n) \stackrel{(51)}{\geq} \frac{1}{2} h(m, 2n) h(3n, 2n) \stackrel{(50)}{\geq} 2^{-8} h(m, 2n).$$

- Hieraus ergibt sich durch Iteration, dass für beliebige  $k \geq 3$  und  $n \geq 2$

$$h(kn, 2n) \geq 2^{-8(k-2)-1} = 2^{15-8k}.$$

- Weil  $h(m, 2n+1) \geq h(m, 2n)$  für beliebige  $m, n \geq 1$  gilt, ergibt sich somit, dass

$$\min\{h(kn, 2n+1), h(kn, 2n)\} = 2^{15-8k}.$$

- Damit ist die Behauptung bewiesen.

### 2.4.3 Untere Schranke für die kritische Auswahlwahrscheinlichkeit $p_c$

- Wir betrachten die Zufallsvariable  $r(C_o) = \sup\{\rho(o, x) : x \in C_o\}$ ,
  - die *Radius* des aktiven (Bond-) Clusters  $C_o$  genannt wird, der den Nullpunkt  $o \in \mathbb{Z}^2$  enthält.
  - Dabei bezeichnet  $\rho(o, x)$  den graphentheoretischen Abstand zwischen  $o$  und  $x$  entlang der Kanten des quadratischen Gitters.
- Wir leiten nun eine obere Schranke für die Tailfunktion von  $r(C_o)$  her, die bei der Abschätzung der kritischen (Bond-) Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_c$  nützlich ist.

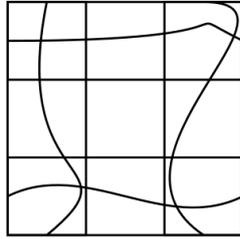


Abbildung 18: Vier Rechtecke, die einen Ring bilden

**Lemma 2.10** *Es gibt eine Konstante  $c \in (0, \infty)$ , so dass*

$$\mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq n) \leq n^{-c} \quad \text{für jedes } n \geq 1. \quad (53)$$

**Beweis**

- Für  $p = 1/2$  werden ebenfalls die Kanten des dualen quadratischen Gitters  $G^* = (V^*, E^*)$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1/2$  aktiviert.
  - Aus Korollar 2.3 ergibt sich somit, dass ein  $6n \times 2n$ -Rechteck in  $G^*$  wenigstens mit der Wahrscheinlichkeit  $2^{-25}$  einen horizontalen aktivierten (dualen) Bond-Pfad besitzt.
  - Analog hat ein  $2n \times 6n$ -Rechteck in  $G^*$  zumindest mit der Wahrscheinlichkeit  $2^{-25}$  einen vertikalen aktivierten Pfad.
- Wir betrachten nun zwei  $6n \times 2n$ -Rechtecke und zwei  $2n \times 6n$ -Rechtecke in  $G^*$ , die einen quadratischen Ring bilden, vgl. Abbildung 18.
  - Zur Erinnerung: Das Ereignis, dass ein  $m \times n$ -Rechteck einen (horizontalen bzw. vertikalen) aktivierten Pfad besitzt, ist ein up-set.
  - Aus der Korrelationsungleichung (38) in Korollar 2.1 ergibt sich deshalb, dass die Wahrscheinlichkeit, dass *jedes* der vier Rechtecke einen horizontalen bzw. vertikalen aktivierten Pfad besitzt (so wie in der Abbildung 18 schematisch dargestellt), größer oder gleich  $\varepsilon = 2^{-100} > 0$  ist.

- Für jedes  $k \geq 1$  sei  $A_k$  der quadratische Ring mit Mittelpunkt im Nullpunkt, der aus zwei dualen  $(3 \cdot 4^k) \times (4^k)$ -Rechtecken und zwei dualen  $(4^k) \times (3 \cdot 4^k)$ -Rechtecken besteht, so wie in Abbildung 18 dargestellt.
- Sei  $E_k$  das Ereignis, dass  $A_k$  einen dualen aktivierten Zyklus enthält, der das Innere von  $A_k$  (und somit auch den Nullpunkt  $o \in \mathbb{Z}^2$ ) umkreist.

– Dann gilt offenbar

$$\mathbb{P}_{1/2}(E_k) \geq \varepsilon \quad \text{für jedes } k \geq 1. \quad (54)$$

– Wenn das Ereignis  $E_k$  eintritt, dann gibt es keinen (nichtdualen) aktivierten Pfad von einem Knoten des quadratischen Gitters  $G = (V, E)$  aus dem Inneren von  $A_k$  zu einem Knoten außerhalb von  $A_k$ .

– In diesem Fall gilt also, dass

$$r(C_o) \leq 3 \cdot 4^k < 4^{k+1}. \quad (55)$$

– Außerdem sind die Ereignisse  $E_k$  und  $E_{k'}$  für  $k \neq k'$  unabhängig, weil die Mengen  $A_k$  und  $A_{k'}$  für  $k \neq k'$  disjunkt sind.

- Insgesamt ergibt sich also, dass für jedes  $\ell \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq 4^{\ell+1}) &\stackrel{(55)}{\leq} \mathbb{P}_{1/2}\left(\bigcap_{k=1}^{\ell} E_k^c\right) \\ &\stackrel{\text{Unabhängigkeit}}{=} \prod_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}_{1/2}(E_k^c) \\ &\stackrel{(54)}{\leq} (1 - \varepsilon)^\ell, \end{aligned}$$

d.h.,

$$\mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq 4^{\ell+1}) \leq (1 - \varepsilon)^\ell. \quad (56)$$

- Sei nun  $n \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl und  $\ell \geq 1$  so gewählt, dass  $4^{\ell+1} \leq n < 4^{\ell+2}$ .
- Dann ergibt sich aus (56) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq n) &\leq \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq 4^{\ell+1}) \\ &\stackrel{(56)}{\leq} (1 - \varepsilon)^\ell \\ &= \exp(\ell \log(1 - \varepsilon)) \\ &= \exp\left((\ell + 2) \log 4 \frac{\ell \log(1 - \varepsilon)}{(\ell + 2) \log 4}\right) \\ &= \left(4^{\ell+2}\right)^{\frac{\ell \log(1 - \varepsilon)}{(\ell + 2) \log 4}} \\ &\leq n^{-c}, \end{aligned}$$

wobei  $c = -\log(1 - \varepsilon)/(3 \log 4) > 0$ .

Die in Lemma 2.10 hergeleitete Abschätzung (53) der Tailfunktion von  $r(C_o)$ , liefert eine untere Schranke für die kritische Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_c = \inf\{p \in [0, 1] : \theta(p) > 0\}$ ,

- die in der Literatur das *Theorem von Harris* genannt wird,
- wobei  $\theta(p) = \mathbb{P}_p(o \rightarrow \infty)$  die (Bond-) Perkolationswahrscheinlichkeit bezeichnet, die der Aktivierungswahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  der Kanten entspricht.

**Theorem 2.9** *Es gilt  $\theta(1/2) = 0$  und somit*

$$p_c \geq \frac{1}{2}. \quad (57)$$

**Beweis**

- Aus (53) ergibt sich, dass  $\theta(1/2) = \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) = \infty) \leq \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq n) \leq n^{-c}$  für jedes  $n \geq 1$ .
- Dies bedeutet, dass  $\theta(1/2) = 0$  und somit  $p_c \geq 1/2$ .

#### 2.4.4 Fundamentalsatz über Pivotvariablen für up-sets

Wir betrachten den gleichen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ , wie in Abschnitt 2.4.1, wobei  $n \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl ist.

- Sei  $\Omega_n = \{0, 1\}^n$  die Menge aller 0-1-Folgen der Länge  $n$ .
- Außerdem sei  $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}(\Omega_n)$  die Familie aller Teilmengen von  $\Omega_n$ .
- Für beliebige  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  mit  $0 \leq p_1, \dots, p_n \leq 1$  betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_n : \mathcal{A}_n \rightarrow [0, 1]$ , das für jedes  $A \in \mathcal{A}_n$  gegeben ist durch

$$\mathbb{P}_n(A) = \sum_{a=(a_1, \dots, a_n) \in A} \prod_{i:a_i=1} p_i \prod_{i:a_i=0} (1-p_i).$$

**Definition**

- Für beliebige  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ ,  $A \in \mathcal{A}_n$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$  heißt die  $i$ -te Komponente  $\omega_i$  von  $\omega$  eine *Pivotvariable* für  $A$ , wenn

$$\text{entweder } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A \quad \text{oder} \quad \omega' = (\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, 1 - \omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n) \in A. \quad (58)$$

- Beachte: Ob  $\omega_i$  eine Pivotvariable ist, hängt also sowohl von  $\omega$  als auch von  $A$  ab.
- Die Wahrscheinlichkeit

$$\beta_i(A) = \mathbb{P}_n(\omega : \omega_i \text{ ist Pivotvariable für } A) \quad (59)$$

wird der *Einfluss* der  $i$ -ten Variablen auf das Ereignis  $A$  genannt.

Der folgende Fundamentalsatz über Pivotvariablen für up-sets wird in der Literatur die *Formel von Margulis–Russo* genannt.

**Theorem 2.10** *Sei  $A \in \mathcal{A}_n$  ein up-set. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}_n(A) = \beta_i(A) \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (60)$$

Wenn  $p_1 = \dots = p_n = p$ , dann gilt insbesondere

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_n(A) = \sum_{i=1}^n \beta_i(A). \quad (61)$$

**Beweis**

- Um die Gültigkeit von (60) zu zeigen, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $i = n$ .
- Für beliebige  $k \in \{1, \dots, n\}$  und  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega_k$  verwenden wir die (Kurz-) Schreibweise

$$\mathbf{p}^x = \prod_{i:x_i=1} p_i \prod_{i:x_i=0} (1 - p_i). \quad (62)$$

– Für  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega_{n-1}$  setzen wir außerdem

$$x_+ = (x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in \Omega_n \quad \text{und} \quad x_- = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \Omega_n.$$

– Mit der in (62) eingeführten Notation gilt dann offenbar, dass

$$\mathbf{p}^{x_+} + \mathbf{p}^{x_-} = \mathbf{p}^x. \quad (63)$$

- Mit dem up-set  $A \in \mathcal{A}_n$  assoziieren wir schließlich die Mengen

$$A_a = \{x \in \Omega_{n-1} : x_+ \in A, x_- \in A\} \quad \text{und} \quad A_b = \{x \in \Omega_{n-1} : x_+ \in A, x_- \notin A\}.$$

- Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(A) &= \sum_{x \in A_a} (\mathbf{p}^{x_+} + \mathbf{p}^{x_-}) + \sum_{x \in A_b} \mathbf{p}^{x_+} \\ &\stackrel{(63)}{=} \sum_{x \in A_a} \mathbf{p}^x + p_n \sum_{x \in A_b} \mathbf{p}^x. \end{aligned}$$

- Durch (partielles) Differenzieren nach  $p_n$  erhalten wir also, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_n} \mathbb{P}_n(A) &= \sum_{x \in A_b} \mathbf{p}^x \\ &= \beta_n(A), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der folgenden Überlegung ergibt:

- Weil  $A \in \mathcal{A}_n$  ein up-set ist, ergibt sich aus  $x_+ \notin A$ , dass auch  $x_- \notin A$  gilt.
- Deshalb ist die  $n$ -te Komponente  $x_n$  von  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  genau dann eine Pivotvariable für  $A$ , wenn  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A_b$ .
- Damit ist (60) bewiesen.
- Die Gültigkeit von (61) ergibt sich nun aus der Kettenregel für die Differentiation von Produkten, denn für  $p_1 = \dots = p_n = p$  gilt, dass

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_n(A) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbb{P}_n(A).$$

Bei der Anwendung von Theorem 2.10 in Abschnitt 2.4.5 ist eine untere Schranke für die Summe  $\sum_{i=1}^n \beta_i(A)$  in (61) nützlich, die in der Literatur *Friedgut–Kalai–Ungleichung* genannt wird und die wir hier ohne Beweis angeben.

**Lemma 2.11** *Sei  $A \in \Omega_n$  ein Ereignis, das die Wahrscheinlichkeit  $q = \mathbb{P}_n(A)$  besitzt. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n \beta_i(A) \geq cq(1-q) \log(\delta^{-1}), \quad (64)$$

wobei  $\delta = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \beta_i(A)$  und  $c > 0$  eine Konstante ist, die weder von  $q$  noch von  $\delta$  abhängt.

Einen *Beweis* von Lemma 2.11 findet man beispielsweise in Grimmett (2010), vgl. Theorem 4.82 dieses Buches.

#### 2.4.5 Obere Schranke für die kritische Auswahlwahrscheinlichkeit $p_c$

- Wir kehren nun wieder zur Untersuchung von Perkolations-eigenschaften in Rechtecken  $R$  des quadratischen Gitters in  $\mathbb{Z}^2$  zurück, wobei wir stets annehmen, dass  $p = p_1 = p_2 = \dots$
- Dabei leiten wir zunächst eine Abschätzung des Einflusses

$$I_p(e, H(R)) = \mathbb{P}_p(e \text{ ist Pivotvariable für } H(R))$$

einer Kante  $e \subset R$  auf die Existenz von (horizontalen) aktivierten Pfaden in  $R$  her.

- Beachte. Weil  $H(R)$  ein up-set ist, gilt

$$I_p(e, H(R)) = \mathbb{P}_p(\omega : \omega^+ \in H(R), \omega^- \notin H(R)),$$

wobei  $\omega^+$  und  $\omega^-$  Bond-Konfigurationen bezeichnen, für die der Zustand aller Kanten außer Kante  $e$  mit dem Zustand der Kanten für  $\omega$  übereinstimmt und die Kante  $e$  für  $\omega^+$  aktiviert bzw. für  $\omega^-$  nicht aktiviert ist.

**Lemma 2.12** *Für beliebige  $m, n \geq 1$  sei  $R$  ein  $m \times n$ -Rechteck in  $\mathbb{Z}^2$ , und  $e$  sei eine beliebige Kante in  $R$ . Für jedes  $p \in (0, 1)$  gilt dann*

$$I_p(e, H(R)) \leq 2 \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq \min\{m/2 - 1, (n-1)/2\}), \quad (65)$$

wobei  $r(C_o) = \sup\{\rho(o, x) : x \in C_o\}$  den Radius des aktiven (Bond-) Clusters  $C_o$  bezeichnet, der den Nullpunkt  $o \in \mathbb{Z}^2$  enthält.

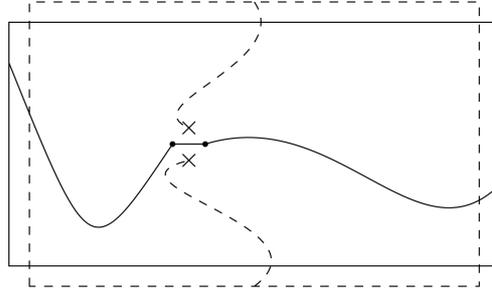


Abbildung 19: Kante  $e$ , die Pivotvariable für  $H(R)$  ist, und zugehörige duale Kante  $e^*$ , die Pivotvariable für  $V(R^h)$  ist.

### Beweis

- Sei  $\omega \in \Omega$  eine Bond-Konfiguration, so dass die Kante  $e \subset R$  eine Pivotvariable für das Ereignis  $H(R)$  ist.
  - Dann gilt  $\omega^+ \in H(R)$ , d.h., bei Vorliegen der Konfiguration  $\omega^+$  gibt es einen horizontalen aktivierten Pfad in  $R$ .
  - Außerdem gilt  $\omega^- \notin H(R)$ , d.h., die Kante  $e \subset R$  gehört unter  $\omega^+$  zu sämtlichen horizontalen aktivierten Pfaden in  $R$ .
- Bei Vorliegen der Konfiguration  $\omega$  ist also jeder der beiden Endpunkte von  $e$  über einen aktivierten Pfad mit dem linken bzw. rechten Rand von  $R$  verbunden, vgl. Abbildung 19.
  - Zumindest in einem der beiden Endpunkte von  $e$  beginnt somit ein aktivierter Pfad, dessen Länge größer oder gleich  $m/2 - 1$  ist.
  - D.h., für jedes  $p \in (0, 1)$  gilt

$$I_p(e, H(R)) \leq 2 \mathbb{P}_p(r(C_o) \geq m/2 - 1). \quad (66)$$

- Weil  $\omega^+ \in H(R)$  und  $\omega^- \notin H(R)$ , ergibt sich aus Lemma 2.6, dass  $\omega^{+*} \notin V(R^h)$  und  $\omega^{-*} \in V(R^h)$ .
  - Bei Vorliegen der Konfiguration  $\omega^-$  gibt es also einen vertikalen aktivierten (dualen) Pfad in  $R^h$ , der die zu  $e$  gehörende duale Kante  $e^*$  enthält.
  - Unter  $\omega$  beginnt somit zumindest in einem der beiden Endpunkte von  $e^*$  ein aktivierter (dualer) Pfad, dessen Länge größer oder gleich  $(n - 1)/2$  ist.
  - D.h., für jedes  $p \in (0, 1)$  gilt

$$I_p(e, H(R)) \leq 2 \mathbb{P}_{1-p}(r(C_o) \geq (n - 1)/2). \quad (67)$$

- Weil das Ereignis  $\{r(C_o) \geq c\}$  für jedes  $c \geq 0$  ein up-set ist, ist die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}_p(r(C_o) \geq c)$  monoton wachsend in  $p$ .
- Aus (66) und (67) ergibt sich also, dass

$$I_p(e, H(R)) \leq \begin{cases} 2 \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq m/2 - 1), & \text{wenn } p \leq 1/2, \\ 2 \mathbb{P}_{1/2}(r(C_o) \geq (n - 1)/2), & \text{wenn } p \geq 1/2. \end{cases}$$

Außerdem benötigen wir die folgende Abschätzung der Perkolationswahrscheinlichkeiten  $h_p(m, n) = \mathbb{P}_p(H(R))$ .

**Lemma 2.13** *Sei  $p > 1/2$  und  $\ell > 1$  sei eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es Konstanten  $\gamma = \gamma(p) > 0$  und  $n_0 = n_0(p, \ell)$ , so dass*

$$h_p(\ell n, n) \geq 1 - n^{-\gamma} \quad \text{für jedes } n \geq n_0. \quad (68)$$

**Beweis**

- Sei  $R$  ein  $(\ell n) \times n$ -Rechteck. Dann ergibt sich aus den Ungleichungen (53) und (65), die in Lemma 2.10 bzw. 2.12 hergeleitet wurden, dass für jede Kante  $e \subset R$  und für jedes  $n \geq 2$

$$I_p(e, H(R)) \stackrel{(65)}{\leq} 2 \mathbb{P}_{1/2} \left( r(C_o) \geq \frac{n-1}{2} \right) \stackrel{(53)}{\leq} 2 \left( \frac{n-2}{2} \right)^{-c},$$

wobei  $c > 0$  eine Konstante ist, die nicht von  $p, \ell, e$  und  $n$  abhängt.

- Hieraus folgt, dass  $I_p(e, H(R)) \leq n^{-c'}$  für jedes hinreichend große  $n \geq n(c)$ , wobei  $0 < c' < c$ .
- Mit der (Kurz-) Schreibweise  $f(p) = \mathbb{P}_p(H(R))$  ergibt sich nun aus der Friedgut-Kalai-Ungleichung (64) in Lemma 2.11, dass

$$\sum_{e \subset R} I_p(e, H(R)) \geq c f(p) (1 - f(p)) \log(\delta^{-1}) \quad \text{für jedes hinreichend große } n,$$

wobei  $\delta = n^{-c'}$  und  $c > 0$  eine Konstante ist, die nicht von  $p, \ell, e, n$  und  $\delta$  abhängt.

- Hieraus und aus der Margulis-Russo-Formel (61) in Theorem 2.10 ergibt sich, dass

$$\frac{d}{dp} f(p) \stackrel{(61)}{=} \sum_{e \subset R} I_p(e, H(R)) \geq c f(p) (1 - f(p)) \log(\delta^{-1}). \quad (69)$$

- Sei nun  $g(p) = \log(f(p)/(1 - f(p)))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} g(p) &= \frac{1 - f(p)}{f(p)} \frac{\left( \frac{d}{dp} f(p) \right) (1 - f(p)) + f(p) \left( \frac{d}{dp} f(p) \right)}{(1 - f(p))^2} \\ &= \frac{1}{f(p) (1 - f(p))} \frac{d}{dp} f(p). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (69) ergibt sich somit, dass

$$\frac{d}{dp} g(p) \geq c \log(\delta^{-1}) = c c' \log n \quad \text{für jedes hinreichend große } n. \quad (70)$$

- In Korollar 2.4 hatten wir gezeigt, dass

$$f(1/2) \geq h_\ell \quad \text{für jedes } n \geq 2,$$

wobei  $h_\ell > 0$  eine Konstante ist, die nur von  $\ell > 1$  abhängt.

– Deshalb gilt auch

$$g(1/2) = \log(f(1/2)/(1 - f(1/2))) \geq c'', \quad (71)$$

wobei  $c'' > 0$  eine Konstante ist, die nur von  $\ell > 0$  abhängt.

– Hieraus und aus (70) ergibt sich also für  $p > 1/2$  und für jedes hinreichend große  $n \geq n_0(p, \ell)$ , dass

$$g(p) \stackrel{(70)}{\geq} c c' \left(p - \frac{1}{2}\right) \log n + g(1/2) \stackrel{(71)}{\geq} \log(n^\gamma),$$

wobei  $\gamma = \gamma(p) > 0$  eine Konstante ist, die nur von  $p \geq 1/2$  abhängt.

- Wegen  $g(p) = \log(f(p)/(1 - f(p)))$  ergibt sich somit, dass

$$\log \frac{f(p)}{1 - f(p)} \geq \log(n^\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(p)}{1 - f(p)} \geq n^\gamma$$

bzw.

$$1 - f(p) \leq n^{-\gamma} f(p) \leq n^{-\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad f(p) \geq 1 - n^{-\gamma}.$$

- Damit ist die Behauptung bewiesen.

Mit den bereit gestellten Hilfsmitteln sind wir nun in der Lage, eine obere Schranke für die kritische Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_c = \inf\{p \in [0, 1] : \theta(p) > 0\}$  herzuleiten,

- die in der Literatur das *Theorem von Kesten* genannt wird,
- wobei  $\theta(p) = \mathbb{P}_p(o \rightarrow \infty)$  die (Bond-) Perkolationswahrscheinlichkeit bezeichnet, die der Aktivierungswahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  der Kanten entspricht.

**Theorem 2.11** *Es gilt  $\theta(p) > 0$  für  $p > 1/2$  und somit*

$$p_c \leq \frac{1}{2}. \quad (72)$$

**Beweis**

- Um die Gültigkeit von (72) zu zeigen, nutzen wir die in Lemma 2.13 hergeleitete Ungleichung.
  - Für jedes  $p > 1/2$  sei  $n \geq n_0(p, 2)$ , wobei  $n_0(p, 2)$  die in Lemma 2.13 betrachtete Konstante ist.
  - Für jedes  $k = 0, 1, 2, \dots$  sei  $R_k$  ein  $(2^k n) \times (2^{k+1} n)$ -Rechteck, wenn  $k$  eine gerade Zahl ist, und ein  $(2^{k+1} n) \times (2^k n)$ -Rechteck, wenn  $k$  eine ungerade Zahl ist.
  - Der linke untere Eckpunkt von  $R_k$  sei jedes  $k = 0, 1, 2, \dots$  der Nullpunkt.
  - Außerdem bezeichne  $E_k$  das Ereignis, dass es einen aktivierten Pfad in  $R_k$  gibt, der die beiden kürzeren Begrenzungslinien von  $R_k$  miteinander verbindet, vgl. Abbildung 20.

– Und  $E_\infty$  sei die Menge aller derjenigen Bond-Konfigurationen des quadratischen Gitters, für die es einen unendlichen aktivierten Cluster gibt.

- Dann gilt offenbar, dass

$$E_\infty \supset \bigcap_{k \geq 0} E_k.$$

- Andererseits ergibt sich aus Lemma 2.13, dass für jedes hinreichend große  $n$

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_p(E_k^c) \leq \sum_{k \geq 0} (2^k n)^{-\gamma} = \frac{n^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} < 1.$$

- Insgesamt ergibt sich hieraus und aus der Subadditivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(E_\infty) &\geq \mathbb{P}_p\left(\bigcap_{k \geq 0} E_k\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{k \geq 0} E_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_p(E_k^c) \\ &> 0. \end{aligned}$$

- Damit ist (72) bewiesen, denn  $\mathbb{P}_p(E_\infty) > 0$  impliziert, dass  $\theta(p) = \mathbb{P}_p(o \rightarrow \infty) > 0$ .

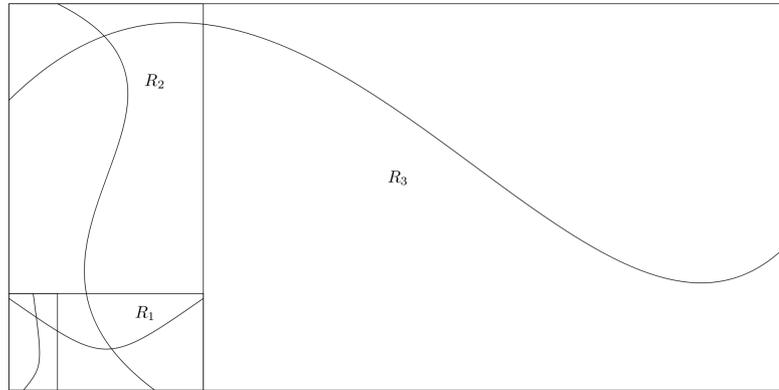


Abbildung 20: Rechtecke  $R_0$  bis  $R_3$  und aktivierte Pfade, die jeweils die beiden kürzeren Begrenzungslinien dieser Rechtecke miteinander verbinden.

Aus den Theoremen 2.9 und 2.11 ergibt sich nun unmittelbar das folgende Resultat.

**Korollar 2.5** Für die kritische (Bond-) Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_c$  im quadratischen Gitter gilt

$$p_c = \frac{1}{2}. \quad (73)$$

## 2.5 Bestimmung der kritischen Auswahlwahrscheinlichkeit $p_{ec}$ in $\mathbb{Z}^2$

- Wir leiten nun noch ein Analogon des Theorems von Harris–Kesten (vgl. Korollar 2.5) für die kritische (Bond–) Auswahlwahrscheinlichkeit  $p_{ec}$  im quadratischen Gitter her, die bereits in Abschnitt 2.1.3 eingeführt worden ist.

– Wir betrachten also die Wahrscheinlichkeit

$$p_{ec} = \sup\{p \in [0, 1] : \chi_x(p) < \infty\} = \inf\{p \in [0, 1] : \chi_x(p) = \infty\},$$

– wobei  $\chi_x(p) = \mathbb{E}|C_o|$  und  $C_o$  den (zufälligen) aktiven Cluster von Eckpunkten in  $\mathbb{Z}^2$  bezeichnet, der den Nullpunkt  $o \in \mathbb{Z}^2$  enthält.

- Hierfür benötigen wir die folgende Abschätzung, die für beliebige zusammenhängende Graphen mit beschränktem Knotengrad gilt.

### 2.5.1 Zusammenhängende Graphen mit beschränktem Knotengrad

#### Lemma 2.14

- Sei  $G = (V, E)$  ein (endlicher oder unendlicher) zusammenhängender Graph mit beschränktem Knotengrad, d.h.,  $2 \leq \Delta = \sup_{v \in V} \gamma(v) < \infty$ .
- Für jeden Eckpunkt  $v \in V$  und für jedes  $n \geq 1$  gilt dann für die Anzahl  $a_{v,n}$  der zusammenhängenden Teilgraphen in  $G$ , die den Eckpunkt  $v$  enthalten und insgesamt aus genau  $n$  Eckpunkten bestehen, dass

$$a_{v,n} \leq c^{n\Delta/2}, \quad (74)$$

wobei  $c \in (1, \infty)$  eine Konstante ist, die nicht von  $n$  abhängt.

#### Beweis

- Sei  $v \in V$  ein beliebiger (fest vorgegebener) Eckpunkt.
- Für beliebige natürliche Zahlen  $i, j, k \geq 1$  bezeichne  $\mathcal{A}_{ijk}$  die Familie derjenigen zusammenhängenden Teilgraphen  $G_{ijk} = (V_{ijk}, E_{ijk}) \subset G$ , so dass
  - $v \in V_{ijk}$ ,  $|V_{ijk}| = i$  und  $|E_{ijk}| = j$
  - und  $k$  Kanten in  $G$  genau einen Endpunkt in  $V_{ijk}$  besitzen.

- Dann gilt

$$\max\{k, 2j\} \leq i\Delta. \quad (75)$$

- Denn es gilt  $k \leq \Delta i$ , weil jede der  $k$  Kanten in  $G$ , die genau einen Endpunkt in  $V_{ijk}$  besitzen, an einem der  $i$  Eckpunkte in  $V_{ijk}$  endet und weil von jedem dieser  $i$  Eckpunkte höchstens  $\Delta$  Kanten ausgehen.
- Außerdem gilt  $2j \leq i\Delta$ , weil von jedem der  $i$  Eckpunkte in  $V_{ijk}$  höchstens  $\Delta$  Kanten ausgehen und weil deshalb die Anzahl  $j$  der Kanten in  $V_{ijk}$  durch  $i\Delta/2$  begrenzt ist.

- Sei  $p \in (0, 1)$ . Für die zufällige Bond-Konfiguration mit (jeweils der Wahrscheinlichkeit  $p$ ) unabhängig aktivierten Kanten bezeichne  $C_v$  den zufälligen Cluster derjenigen aktivierten Kanten, die (durch aktivierten Pfade) mit  $v$  verbunden sind.
  - Für jedes  $i \geq 1$  gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C_v| = i) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} |\mathcal{A}_{ijk}| p^j (1-p)^k \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} |\mathcal{A}_{ijk}| \sqrt{p^{2j} ((1-p)^2)^k} \\ &\stackrel{(75)}{\geq} \sum_{j,k=1}^{\infty} |\mathcal{A}_{ijk}| \sqrt{(p(1-p)^2)^{i\Delta}}. \end{aligned}$$

- Weil stets  $1 \geq \mathbb{P}_p(|C_v| = i)$  gilt, ergibt sich hieraus, dass für jedes  $i \geq 1$

$$a_{v,i} = \sum_{j,k=1}^{\infty} |\mathcal{A}_{ijk}| \leq (p(1-p)^2)^{-i\Delta/2}$$

und somit

$$a_{v,i} \leq \left( \max_{p \in (0,1)} \{p(1-p)^2\} \right)^{-i\Delta/2} = \left( \frac{4}{27} \right)^{-i\Delta/2} = \left( \frac{27}{4} \right)^{i\Delta/2}.$$

### 2.5.2 $m$ -abhängige Site-Konfigurationen

Außerdem benötigen wir das Konzept der  $m$ -abhängigen Site-Konfigurationen.

- Sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger zusammenhängender und lokal endlicher Graph.
- Um den Begriff der  $m$ -abhängigen Site-Konfiguration einzuführen, gehen wir ähnlich wie in Abschnitt 2.3 vor.
  - Zur Erinnerung: Eine Funktion  $\omega : V \rightarrow \{0, 1\}$  heißt *Site-Konfiguration*, wobei wir die Schreibweise  $v \mapsto \omega_v$  verwenden, d.h.  $\omega_v = \omega(v)$  für jedes  $v \in V$ .
  - Sei  $\Omega^s = \{0, 1\}^V$  die Familie aller Site-Konfigurationen. Dabei heißt ein Eckpunkt  $v \in V$  *aktiviert* in der Konfiguration  $\omega \in \Omega^s$  genau dann, wenn  $\omega_v = 1$ .
  - Ein Pfad von  $v$  nach  $v'$  heißt *aktiviert*, wenn sämtliche Eckpunkte des Pfades aktiviert sind.
  - Sei  $\mathcal{A}^s$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega^s$ , die die so genannten *Zylindermengen*

$$C(F, z) = \{\omega \in \Omega^s : \omega_f = z_f \text{ for all } f \in F\}$$

enthält, wobei  $F$  eine endliche Teilmenge von  $V$  ist und  $z \in \{0, 1\}^F$ .

- Allerdings betrachten wir nun anstelle des in (23) eingeführten Produktmaßes ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^s : \mathcal{A}^s \rightarrow [0, 1]$ , so dass die (zufälligen Aktivierungs-) Zustände der Eckpunkt Mengen  $V_1, V_2 \subset V$  unabhängige Zufallsvariablen sind, wenn

$$|v_1 - v_2| \geq m \quad \text{für beliebige } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2,$$

wobei  $m \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl ist und  $|v_1 - v_2|$  den graphentheoretischen Abstand zwischen  $v_1$  und  $v_2$  bezeichnet.

### Beispiel

- Für beliebige  $p \in (0, 1)$  betrachten wir zunächst die  $(\mathcal{A}^s, \sigma_{\mathcal{F}})$ -messbare Abbildung  $\Xi^s : \Omega^s \rightarrow \mathcal{F}$  über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega^s, \mathcal{A}^s, \mathbb{P}_p^s)$ ,
  - wobei  $\Xi^s(\omega) = \{v \in V : \omega_v = 1\}$  und  $\mathbb{P}_p^s$  das in (23) eingeführte Produktmaß ist.
  - D.h., es gilt  $\mathbb{P}_p^s(C(F, z)) = p^{|\{f \in F : z_f = 1\}|} (1-p)^{|\{f \in F : z_f = 0\}|}$  für beliebige Zylindermengen  $C(F, z)$ .

- Beachte. Die zufällige Menge  $\Xi^s$  kann als die Vereinigung von unabhängig aktivierten Eckpunkten aufgefasst werden.

- Außerdem betrachten wir die zufällige Site-Konfiguration  $\tilde{\Xi}^s : \Omega^s \rightarrow \mathcal{F}$  über  $(\Omega^s, \mathcal{A}^s, \mathbb{P}_p^s)$ , wobei

$$\tilde{\Xi}^s(\omega) = \{v \in V : \text{Für ein } \tilde{v} \in V \text{ mit } |\tilde{v} - v| = 1 \text{ gilt } \omega_{\tilde{v}} = 1\}.$$

- Dann ist  $\tilde{\Xi}^s$  eine 3-abhängige Site-Konfiguration.

### Lemma 2.15

- Sei  $G = (V, E)$  ein (endlicher oder unendlicher) zusammenhängender Graph mit beschränktem Knotengrad, d.h.,  $2 \leq \Delta = \sup_{v \in V} \gamma(v) < \infty$ .
- Außerdem sei  $\mathbb{P}^s : \mathcal{A}^s \rightarrow [0, 1]$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass die Aktivierungszustände der Eckpunkte  $m$ -abhängige Zufallsvariablen sind.
- Wenn das  $m$ -abhängige Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^s$  so beschaffen ist, dass

$$\mathbb{P}^s(\omega \in \Omega^s : \omega_v = 1) \leq p'$$

für jedes  $v \in V$  und für eine (hinreichend kleine) Konstante  $p' = p'(m, \Delta) > 0$ ,

- dann gibt es eine Konstante  $c' = c'(m, \Delta) > 0$ , so dass

$$\mathbb{P}^s(|C_v^s| \geq n) \leq \exp(-c'n) \quad \text{für beliebige } v \in V \text{ und } n \geq 1, \quad (76)$$

- wobei  $C_v^s \subset V$  die (zufällige) Menge derjenigen Eckpunkte bezeichnet, die mit  $v$  durch einen Pfad von aktivierten Eckpunkten verbunden sind.

**Beweis**

- Für jeden Eckpunkt  $x \in V$  gibt es höchstens  $\Delta^m$  Eckpunkte in  $V$ , deren (graphentheoretischer) Abstand von  $x$  kleiner oder gleich  $m - 1$  ist, denn wegen  $\Delta \geq 2$  gilt

$$1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^{m-1} \leq \Delta^m. \quad (77)$$

- Wenn  $|C_v^s| \geq n$  gilt,
  - dann gibt es eine Teilmenge  $V' = V'_{v,n} \subset V$ , die genau  $n$  aktivierte Eckpunkte enthält, von denen einer der Eckpunkt  $v \in V$  ist.
  - Außerdem gibt es wegen (77) eine Teilmenge  $V'' \subset V'$ , die wenigstens  $n/\Delta^m$  Eckpunkte enthält, so dass  $|x_1 - x_2| \geq m$  für beliebige (voneinander verschiedene) Eckpunkte  $v_1, v_2 \in V''$ .
  - D.h., die Eckpunkte in  $V''$  werden unabhängig voneinander aktiviert.
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Eckpunkt in  $V'$  aktiviert ist, ist also nicht größer als  $(p')^{n/\Delta^m}$ .
- Wegen Lemma 2.14 gibt es höchstens  $c^{n\Delta/2}$  Teilmengen von  $V$ , die den Eckpunkt  $v$  und  $n - 1$  weitere (aktivierte) Eckpunkte enthalten, wobei  $c \in (1, \infty)$  eine Konstante ist, die nicht von  $n$  abhängt.

- Insgesamt ergibt sich hieraus und aus der Subadditivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen, dass

$$\mathbb{P}^s(|C_v^s| \geq n) \leq c^{n\Delta/2} (p')^{n/\Delta^m} = \left(c^{\Delta/2} (p')^{1/\Delta^m}\right)^n. \quad (78)$$

- Wenn  $p' > 0$  hinreichend klein ist, so dass  $a = c^{\Delta/2} (p')^{1/\Delta^m} < 1$ , dann ergibt sich die Abschätzung (76) mit  $c' = -\log a$ .

**Beachte**

- Für  $m = 2$  genügt es wegen (77) und (78) hinsichtlich der Kleinheit von  $p' > 0$  zu fordern, dass  $c^{\Delta/2} (p')^{1/(1+\Delta)}$ , wobei  $c = 27/4$  gesetzt werden kann, vgl. den Beweis von Lemma 2.14.
- Im nachfolgenden Abschnitt 2.5.3 werden wir den Fall  $m = 5$  und  $\Delta = 4$  betrachten. Um dann Lemma 2.15 anwenden zu können, genügt es  $p' > 0$  so zu wählen, dass

$$(27/4)^2 (p')^{1/4^5} < 1. \quad (79)$$

**2.5.3 Exponentiell beschränkte Bond-Cluster in  $\mathbb{Z}^2$** 

- Wir kehren nun zur Untersuchung von zufälligen Bond-Konfigurationen im quadratischen Gitter zurück, wobei wir annehmen, dass die Kanten unabhängig aktiviert werden und zwar jeweils mit der (Bond-) Auswahlwahrscheinlichkeit  $p < 1/2$ .
- Mit Hilfe von Lemma 2.15 zeigen wir, dass dann die Tailfunktion von  $|C_o|$  exponentiell beschränkt ist, wobei  $C_o$  den aktiven (Bond-) Cluster bezeichnet, der den Nullpunkt enthält.

- Für die kritischen Auswahlwahrscheinlichkeiten  $p_c$  und  $p_{ec}$  ergibt sich hieraus, dass  $p_{ec} = p_c = 1/2$ .

**Theorem 2.12** *Für jedes  $p < 1/2$  gibt es eine Konstante  $a = a(p)$ , so dass*

$$\mathbb{P}_p(|C_o| \geq n) \leq \exp(-an) \quad \text{für jedes } n \geq 1. \quad (80)$$

**Beweis**

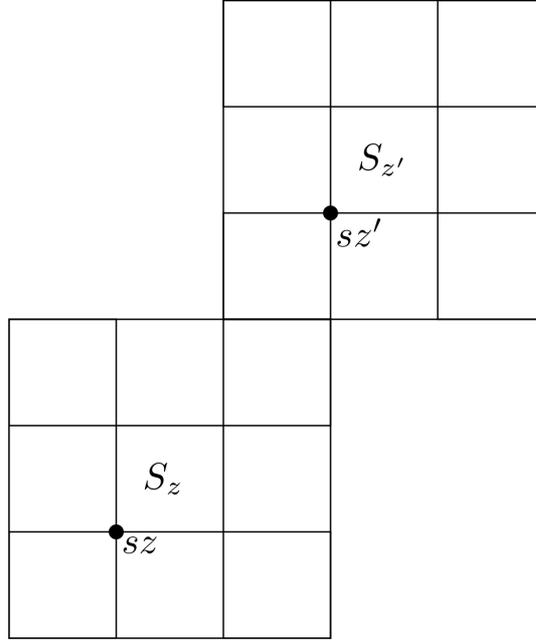
- Sei  $p < 1/2$ , und  $p' = p'(5, 4)$  sei so gewählt, dass (79) gilt.
- Außerdem sei  $G^* = (V^*, E^*)$  das duale quadratische Gitter, dessen Kanten mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p > 1/2$  aktiviert werden.
  - Für  $c = (1 - p')^{1/4}$  ergibt sich dann aus Lemma 2.13, dass es eine (hinreichend große) natürliche Zahl  $k \geq 1$  gibt, so dass

$$h_{1-p}(3k, k) > c, \quad (81)$$

- wobei  $h_{1-p}(3k, k) = \mathbb{P}_{1-p}(H(R))$  die (horizontale) Perkulationswahrscheinlichkeit für das  $(3k) \times k$ -Rechteck  $R$  im dualen quadratischen Gitter  $G^* = (V^*, E^*)$  bezeichnet.
- So wie in Abbildung 18 betrachten wir nun vier  $(3k) \times k$ -Rechtecke in  $G^* = (V^*, E^*)$ ,
  - deren (paarweise) Durchschnitte  $k \times k$ -Quadrate sind und
  - die einen quadratischen Ring  $A$  bilden, der in der Mitte ein  $s \times s$ -Quadrat  $S$  des (nicht dualen) quadratischen Gitters  $G = (V, E)$  enthält, wobei  $s = k + 1$ .
- Aus (81) und aus der Korrelationsungleichung (38) in Korollar 2.1 ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $B^*$ ,
  - dass *jedes* der vier Rechtecke einen horizontalen bzw. vertikalen aktivierten Pfad in  $G^* = (V^*, E^*)$  besitzt (so wie in der Abbildung 18 schematisch dargestellt), größer oder gleich  $c^4 = 1 - p'$  ist,
  - wobei die Vereinigung dieser vier aktivierten Pfade einen (dualen) aktivierten Zyklus enthält, der  $S$  umschließt.
- Mit  $B(S)$  bezeichnen wir das Ereignis, dass es einen Eckpunkt  $x$  in  $S \subset V$  und einen aktivierten Pfad in  $G = (V, E)$  von  $x$  zu einem Eckpunkt von  $G$  gibt, der außerhalb von  $A$  liegt.
- Weil das Ereignis  $B(S)$  genau dann eintritt, wenn  $B^*$  nicht eintritt, gilt

$$\mathbb{P}_p(B(S)) \leq 1 - c^4 = p'. \quad (82)$$

- Wir definieren nun ein 5-abhängiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^s$ , für das die Eckpunkte des (nicht dualen) quadratischen Gitters in  $G = (V, E)$  wie folgt aktiviert werden, (vgl. Abbildung 21).
  - Der Eckpunkt  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$  wird genau dann aktiviert, wenn das Ereignis  $B(S_z)$  für das  $s \times s$ -Quadrat  $S_z = [sz_1 + 1, sz_1 + s] \times [sz_2 + 1, sz_2 + s]$  eintritt.

Abbildung 21: Konstruktion des 5-abhängigen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{P}^s$ 

- Dies bedeutet, dass jeder Eckpunkt  $z \in \mathbb{Z}^2$  mit der  $\mathbb{P}^s$ -Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}_p(B(S_z))$  aktiviert wird, die wegen (82) kleiner oder gleich  $p'$  ist.
- Sei  $C_o$  der aktive (Bond-) Cluster in der ursprünglich betrachteten (unabhängig aktivierten) Bond-Konfiguration des quadratischen Gitters  $G = (V, E)$ , der den Nullpunkt enthält.
- Außerdem sei  $C'_o$  der aktive (Bond-) Cluster, der den Nullpunkt enthält, unter dem 5-abhängigen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^s$ .
- Wegen (79) ergibt sich dann aus Lemma 2.15, dass es eine Konstante  $c' > 0$  gibt, so dass

$$\mathbb{P}^s(|C'_o| \geq n) \leq \exp(-c'n) \quad \text{für jedes } n \geq 1. \quad (83)$$

- Für alle  $w \in \mathbb{Z}^2$  gilt  $|M_w| = (4s + 1)^2$ , wobei

$$M_w = \{v \in \mathbb{Z}^2 : |v - w|_\infty \leq 2s\} \quad \text{und} \quad |v|_\infty = \max(|v_1|, |v_2|).$$

- Deshalb folgt aus  $w \in C_0$  und  $|C_0| > (4s + 1)^2$ , dass  $C_0 \setminus M_w \neq \emptyset$ .
- Ist  $z \in \mathbb{Z}^2$  und  $w \in S_z$ , so gilt

$$M_w \supset \{v' \in \mathbb{Z}^2 : \exists v'' \in S_z : |v' - v''| \leq s\}.$$

- Insbesondere folgt aus  $S_z \cap C_0 \neq \emptyset$  und  $|C_0| > (4s + 1)^2$ , dass  $B(S_z)$  eintritt.

- Ist  $(w_1, w_2)$  eine Kante in  $\mathbb{Z}^2$ , so ist die Menge  $\{z \in \mathbb{Z}^2 : S_z \cap \{w_1, w_2\} \neq \emptyset, S_z \cap C_0 \neq \emptyset\}$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{Z}^2$ .
  - Wegen  $o \in \{z \in \mathbb{Z}^2 : S_z \cap C_0 \neq \emptyset\}$  folgt somit  $\{z \in \mathbb{Z}^2 : S_z \cap C_0 \neq \emptyset\} \subset C'_0$ .
  - Da  $|S_z \cap \mathbb{Z}^2| = s^2$  folgt somit für alle  $n \geq (4s + 1)^2$ , dass

$$\mathbb{P}_p(|C_0| \geq n) \leq \mathbb{P}^s(|C'_0| \geq n/s^2) \leq \exp(-c'n/s^2).$$

Aus Theorem 2.12 ergibt sich nun unmittelbar das folgende Resultat.

**Korollar 2.6** *Für die kritischen Auswahlwahrscheinlichkeiten  $p_c$  und  $p_{es}$  im quadratischen Gitter gilt*

$$p_{es} = p_c = \frac{1}{2}. \quad (84)$$

**Beweis**

- Aus der Ungleichung (80) in Theorem 2.12 ergibt sich, dass  $\mathbb{E}|C_0| < \infty$ , wenn  $p < 1/2$ .
- Hieraus folgt, dass  $p_{es} \geq 1/2$ .
- Weil stets  $p_{es} \leq p_c$  gilt, ergibt sich andererseits aus Korollar 2.5, dass  $p_{es} \leq p_c \leq 1/2$ .

### 3 Poissonsche Eckpunktsysteme in $\mathbb{R}^d$

#### 3.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

##### 3.1.1 Existenz und Eindeutigkeit von zufälligen Zählmaßen

- Zur Erinnerung: Sei  $d \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl. Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  der Borel-Mengen im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  ist die kleinste Familie  $\mathcal{G}$  von Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , die
  - alle Quader der Form  $B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$  für beliebige  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a_i \leq b_i$  für  $i = 1, \dots, d$  enthält und
  - die abgeschlossen ist bezüglich der Bildung des Komplementes sowie der Vereinigung von abzählbar vielen Mengen aus  $\mathcal{G}$ , d.h., für beliebige  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$  gilt  $\mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{G}$  und  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$ .
- Das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß  $\nu_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  wird eindeutig bestimmt durch seine Werte  $\nu_d(B) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$  für alle Borel-Mengen der Form  $B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \in \mathcal{Q}^d$ , wobei  $\mathcal{Q}^d$  die Familie der (beschränkten) halboffenen  $d$ -dimensionalen Quader in  $\mathbb{R}^d$  ist, d.h.,

$$\mathcal{Q}^d = \{B \subset \mathbb{R}^d : B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d], a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i \forall i = 1, \dots, d\}. \quad (1)$$

**Definition**

- Sei  $\mathbb{N}$  die Familie aller lokal endlichen Zählmaße  $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ , d.h., es gilt  $\varphi(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{Q}^d$  und  $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$  für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Außerdem sei  $\mathcal{N}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{N}$ , so dass  $\varphi \mapsto \varphi(B)$  für jedes beschränkte  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  eine  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist.
- Ein *zufälliges Zählmaß*  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  ist eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Werten in dem messbaren Raum  $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ , d.h.,  $N$  ist ein (mengen-indizierter) stochastischer Prozess  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  über  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , so dass  $\{N_B(\omega), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  für jedes  $\omega \in \Omega$  ein lokal endliches Zählmaß aus  $\mathbb{N}$  ist.

**Theorem 3.1** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein zufälliges Zählmaß. Dann ist die Verteilung von  $\{N_B\}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß über  $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ , das eindeutig bestimmt ist durch die Familie der „endlich-dimensionalen“ Wahrscheinlichkeiten  $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$ , wobei

$$P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n).$$

Der *Beweis* von Theorem 3.1 kann mit Hilfe des Satzes über monotone Klassen (vgl. Lemma 2.2) geführt werden. Dabei genügt es, die Wahrscheinlichkeiten  $P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n)$  für paarweise disjunkte Quader  $B_1, \dots, B_n$  zu betrachten. Außerdem gilt der folgende (Existenz-) Satz von Kolmogorov für zufällige Zählmaße, wenn die Familie der Wahrscheinlichkeiten  $P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n)$  den Symmetrie-, Verträglichkeits-, Additivitäts- bzw. Stetigkeitsbedingungen (2) – (5) genügt.

**Theorem 3.2**

- Sei  $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$  eine Familie von Wahrscheinlichkeiten, so dass für jedes  $n \geq 1$

$$P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P_{B_{\pi(1)}, \dots, B_{\pi(n)}}(k_{\pi(1)}, \dots, k_{\pi(n)}) \quad (2)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{B_1, \dots, B_n, B_{n+1}}(k_1, \dots, k_n, k) = P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) \quad (3)$$

für jede Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, n\}$ , für jedes  $n$ -Tupel  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  von nichtnegativen ganzen Zahlen und für beliebige halboffene  $d$ -dimensionale Quader  $B_1, \dots, B_n, B_{n+1} \in \mathcal{Q}^d$ .

- Außerdem gelte

$$\sum_{k_j + \dots + k_n = k, k_j, \dots, k_n \geq 0} P_{B_1, \dots, B_{j-1}, B_j, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P_{B_1, \dots, B_{j-1}, \bigcup_{i=j}^n B_i}(k_1, \dots, k_{j-1}, k) \quad (4)$$

für beliebige  $j, n \geq 1$  mit  $j \leq n$ , für beliebige  $k_1, \dots, k_{j-1} \geq 0$  und paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$ , und es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{[x_1 - \frac{1}{n}, x_1] \times \dots \times [x_d - \frac{1}{n}, x_d]}(0) = 1 \quad (5)$$

für jedes  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ .

- Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und ein zufälliges Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  über diesem Wahrscheinlichkeitsraum, so dass  $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$  die endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten von  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  sind.

Der *Beweis* von Theorem 3.2 beruht ebenfalls auf Standardtechniken der Maßtheorie, vgl. z.B. Kallenberg (2001), S. 115–116.

### 3.1.2 Poisson-Prozesse als zufällige Zählmaße

Wir führen nun den Begriff des Poissonschen Zählmaßes im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  ein.

**Definition** Sei  $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  die Familie aller beschränkten Borel-Mengen in  $\mathbb{R}^d$  und sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  ein beliebiges lokal-endliches Maß, d.h.,  $\mu(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

- Man sagt, dass  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein *Poissonsches Zählmaß* mit dem *Intensitätsmaß*  $\mu$  ist, wenn
  1.  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen sind für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und
  2.  $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass das Intensitätsmaß  $\mu$  proportional zum  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maß  $\nu_d$  ist, d.h., für eine Konstante  $\lambda \in (0, \infty)$  gilt

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (6)$$

dann sagt man, dass  $\{N_B\}$  ein *homogenes Poissonsches Zählmaß* mit der *Intensität*  $\lambda$  (bzw. kurz ein *homogener Poisson-Prozess*) im  $\mathbb{R}^d$  ist.

#### Beachte

- Aus Theorem 3.1 ergibt sich, dass die Bedingungen 1 und 2 in der Definition des Poisson-Prozesses durch die folgenden (scheinbar schwächeren) Bedingungen ersetzt werden können:
  - 1\*. Die Zufallsvariablen  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$  sind unabhängig für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{Q}^d$  und
  - 2\*.  $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$  gilt für jedes  $B \in \mathcal{Q}^d$ .
- Wenn das Intensitätsmaß  $\mu$  absolutstetig bezüglich des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h., wenn es eine Borel-messbare Funktion  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  gibt, so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (7)$$

dann wird  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  die *Intensitätsfunktion* des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  genannt. Die Intensitätsfunktion des Poisson-Prozesses in Abbildung 22 ist gegeben durch

$$\lambda(x_1, x_2) = 0.001 \cdot x_1 \quad \forall x_1 > 0.$$

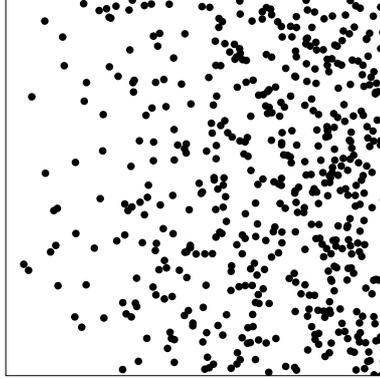


Abbildung 22: Inhomogener Poisson-Prozess

Wir diskutieren zunächst einige elementare Eigenschaften von Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^d$ .

**Theorem 3.3** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .

- Dann gilt

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n) = \frac{\mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n)}{k_1! \dots k_n!} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \mu(B_i)\right) \quad (8)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  und paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

- Außerdem genügen die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \mu(B) < \infty$  und für paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$  einer Multinomialverteilung, d.h., es gilt

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)} \quad (9)$$

für beliebige  $k, k_1, \dots, k_n \geq 0$  mit  $k = k_1 + \dots + k_n$ .

Der Beweis von Theorem 3.3 ergibt sich unmittelbar aus den Bedingungen 1 und 2 in der Definition des Poisson-Prozesses.

Mit Hilfe der Theoreme 3.1 und 3.3 lässt sich eine einfache Methode zur Konstruktion von Poisson-Prozessen mit endlichem Intensitätsmaß herleiten.

**Korollar 3.1** Sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  ein beliebiges Maß mit  $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ , und  $N : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  bzw.  $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  seien unabhängige Zufallsvariablen mit

$$N \sim \text{Poi}(\mu(\mathbb{R}^d)), \quad S_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1. \quad (10)$$

Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$N_B = \#\{i : 1 \leq i \leq N, S_i \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (11)$$

ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .

### Beweis

- Mit der Schreibweise

$$p(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (12)$$

ergibt sich aus (10) und (11), dass

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N = k) = \frac{k!}{k_0!k_1! \dots k_n!} p^{k_0}(B_0) p^{k_1}(B_1) \dots p^{k_n}(B_n)$$

für jedes  $n \geq 1$ , für beliebige, paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und für  $k_0, k_1, \dots, k_n \geq 0$  mit  $k = k_0 + k_1 + \dots + k_n$ , wobei  $B_0 = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i$ .

- Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n) &= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} P(N = k) P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N = k) \\ &= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d)} \mu^k(\mathbb{R}^d)}{k!} \frac{k!}{(k - k_1 - \dots - k_n)! k_1! \dots k_n!} p^{k-k_1-\dots-k_n}(B_0) p^{k_1}(B_1) \dots p^{k_n}(B_n) \\ &= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B_0)} \mu^{k-k_1-\dots-k_n}(B_0)}{(k - k_1 - \dots - k_n)!} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d \setminus B_0)}}{k_1! \dots k_n!} \mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n) \\ &= \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d \setminus B_0)}}{k_1! \dots k_n!} \mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\mu(B_i)} \mu^{k_i}(B_i)}{k_i!}. \end{aligned}$$

- Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Formel (8) in Theorem 3.3, dann erkennt man, dass das in (11) gegebene zufällige Zählmaß die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen hat wie ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .
- Hieraus und aus Theorem 3.1 ergibt sich nun die Behauptung.  $\square$

### Beachte

- Wenn das Intensitätsmaß  $\mu$  in Korollar 3.1 die Form  $\mu(B) = \lambda \nu_d(B \cap C)$  hat für ein  $\lambda < \infty$  und eine beschränkte Borel-Menge  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(C) < \infty$ , dann sind die in (10) betrachteten (unabhängigen) Zufallsvektoren  $S_1, S_2, \dots$  gleichverteilt in  $C$ .
- Wenn zusätzlich angenommen wird, dass die Menge  $C$  ein  $d$ -dimensionaler Quader der Form

$$C = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \quad (13)$$

ist, dann hat der Zufallsvektor  $S_i = (S_{i1}, \dots, S_{id})$  für jedes  $i = 1, \dots, n$  unabhängige Komponenten  $S_{ij}, \dots, S_{id}$ , wobei  $S_{ij} \sim U(a_j, b_j)$  für jedes  $j = 1, \dots, d$ .

- Die Aussage von Korollar 3.1 wird deshalb manchmal die *bedingte Gleichverteilungseigenschaft* von homogenen Poisson-Prozessen in beschränkten Borel-Mengen genannt.

### 3.1.3 Summation und Einschränkung von Poisson-Prozessen

Das folgende Resultat über die Summation von unabhängigen Poisson-Prozessen ist ein Analogon der Faltungsstabilität von Poisson-Verteilungen.

**Theorem 3.4** Sei  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  eine Folge unabhängiger Poisson-Prozesse in  $\mathbb{R}^d$  mit den Intensitätsmaßen  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , so dass das Maß  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$  lokal endlich ist. Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  mit  $N_B = \sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .

#### Beweis

- Wir zeigen zunächst, dass

$$N_B \sim \text{Poi}(\mu(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (14)$$

- Weil  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  unabhängige Zählmaße sind, sind die Zufallsvariablen  $N_B^{(1)}, N_B^{(2)}, \dots$  unabhängig, wobei  $N_B^{(i)} \sim \text{Poi}(\mu_i(B))$  für jedes  $i \geq 1$  und für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .
- Aus der Faltungsstabilität von Poisson-Verteilungen ergibt sich somit, dass für jedes  $n \geq 1$  und für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{i=1}^n N_B^{(i)} \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i(B)\right).$$

- Hieraus und aus der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ergibt sich, dass für beliebige  $k \geq 0$  und  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} P(N_B \leq k) &= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)} \leq k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n N_B^{(i)} \leq k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-\sum_{i=1}^n \mu_i(B)) (\sum_{i=1}^n \mu_i(B))^j}{j!} = \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-\mu(B)) (\mu(B))^j}{j!}. \end{aligned}$$

- Damit ist (14) bewiesen.

- Um den Beweis zu beenden, ist noch zu zeigen, dass die Zufallsvariablen  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots, N_{B_n}$  für jedes  $n \geq 2$  und paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  unabhängig sind.
  - Weil die Zufallsvariablen  $\{N_{B_j}^{(i)}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$  für beliebige  $m, n \geq 1$  unabhängig sind, ergibt sich aus dem Satz über die Unabhängigkeit zusammengesetzter Abbildungen (vgl. Theorem WR-3.18), dass auch die Zufallsvariablen  $\{\sum_{i=1}^m N_{B_j}^{(i)}, j = 1, \dots, n\}$  unabhängig sind.

- Wegen der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen kann man nun leicht zeigen, dass die Zufallsvariablen

$$\{N_{B_j}, j = 1, \dots, n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} N_{B_j}^{(i)}, j = 1, \dots, n \right\}$$

ebenfalls unabhängig sind.  $\square$

Wir zeigen nun noch, dass die Einschränkung von Poisson-Prozessen auf Borelsche Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  erneut zu Poisson-Prozessen führt.

**Theorem 3.5** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ , und sei  $B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige Borel-Menge. Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit  $\tilde{N}_B = N_{B \cap B_0}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\tilde{\mu}$ , wobei  $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap B_0)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Beweis**

- Weil  $\{N_B\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$  ist, gilt

$$\tilde{N}_B = N_{B \cap B_0} \sim \text{Poi}(\mu(B \cap B_0)) = \text{Poi}(\tilde{\mu}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

- Weil für beliebige paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  auch die Mengen  $B_1 \cap B_0, \dots, B_n \cap B_0$  paarweise disjunkt sind, sind die Zufallsvariablen  $\tilde{N}_{B_1} = N_{B_1 \cap B_0}, \dots, \tilde{N}_{B_n} = N_{B_n \cap B_0}$  unabhängig.  $\square$

### 3.1.4 Simulationsalgorithmus; Akzeptanz- und Verwerfungsmethode

Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Poisson-Prozess mit dem (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß  $\mu$ , und seien  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$  paarweise disjunkte Quader mit der in (1) gegebenen Form, so dass  $\mu(B_i) > 0$  für jedes  $i = 1, \dots, n$ .

Um den Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  in der beschränkten Borel-Menge  $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$  zu simulieren, genügt es zu beachten,

- dass das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B\}$  mit  $\tilde{N}_B = N_{B \cap C}$  gemäß Theorem 3.5 ein Poisson-Prozess mit dem endlichen Zählmaß  $\tilde{\mu}$  ist wobei  $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap C)$ ,
- und dass man deshalb gemäß Theorem 3.3 bzw. Korollar 3.1 wie folgt vorgehen kann:

**Schritt 0** Generiere eine Realisierung von  $N_C \sim \text{Poi}(\mu(C))$ .

**Schritt 1** Falls  $N_C = k$ , dann generiere eine Realisierung des multinomial verteilten Zufallsvektors

$$(N_1, \dots, N_n) \sim \text{Mult}(k; p_1, \dots, p_n),$$

wobei  $p_i = \mu(B_i)/\mu(C)$  für jedes  $i = 1, \dots, n$ .

**Schritt 2** Falls  $(N_1, \dots, N_n) = (k_1, \dots, k_n)$ , dann generiere

$$k_1 \text{ unabhängige Zufallsvektoren } S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)} \sim \mu(\cdot \cap B_1)/\mu(B_1),$$

$\vdots$

$$k_n \text{ unabhängige Zufallsvektoren } S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)} \sim \mu(\cdot \cap B_n)/\mu(B_n),$$

wobei die Zufallsvektoren  $(S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)}), \dots, (S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)})$  ebenfalls unabhängig sind.

### Beachte

- Seien  $(s_1^{(1)}, \dots, s_{k_1}^{(1)}), \dots, (s_1^{(n)}, \dots, s_{k_n}^{(n)})$  Realisierungen von  $(S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)}), \dots, (S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)})$ .
- Dann ist die (nichtgeordnete) Menge  $\{s_1^{(1)}, \dots, s_{k_1}^{(1)}, \dots, s_1^{(n)}, \dots, s_{k_n}^{(n)}\}$  von Punkten im  $\mathbb{R}^d$  eine Realisierung der Atome des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  in der Menge  $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$ .

Wenn die Anzahl  $n$  der Quader  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$  groß ist, aus denen die Menge  $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$  besteht, dann kann die praktische Umsetzung der Simulationsschritte 1 und 2 mit einem großen Rechenaufwand verbunden sein.

- In diesem Fall kann es effizienter sein, den Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  mit der folgenden *Akzeptanz- und Verwerfungsmethode* in  $C$  zu simulieren.
- Diese Methode hat darüber hinaus den Vorteil, dass das Gebiet  $C \subset \mathbb{R}^d$ , in dem Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  simuliert wird, eine *beliebige* beschränkte Borel-Menge sein kann.
  - Sei also  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  eine beliebiges (diffuses und lokal endliches) Maß, sei  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit  $0 < \mu(C) < \infty$ , und sei

$$\tilde{C} = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$$

ein (beschränkter)  $d$ -dimensionaler Quader mit  $C \subset \tilde{C}$ .

- Um den Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  in der Menge  $C$  zu simulieren, kann man nun gemäß Theorem 3.5 wie folgt vorgehen:

**Schritt 0** Generiere eine Realisierung von  $N_C \sim \text{Poi}(\mu(C))$ .

**Schritt 1** Falls  $N_C = k$ , dann generiere so lange Realisierungen  $s_1, s_2, \dots$  der unabhängigen Zufallsvektoren  $S_1, S_2, \dots \sim \mu(\cdot \cap \tilde{C})/\mu(\tilde{C})$ , bis  $k$  der Pseudozufallszahlen  $s_1, \dots, s_n$  in der Menge  $C$  liegen, wobei

$$n = \min_{j \geq 1} \{ \#\{i : s_i \in C, 1 \leq i \leq j\} \geq k \}.$$

**Schritt 2** Dann ist die (nichtgeordnete) Menge  $\{s_i : s_i \in C, 1 \leq i \leq n\}$  von Punkten im  $\mathbb{R}^d$  eine Realisierung der Atome des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  in der Menge  $C$ .

### 3.2 Messbare Indizierung der Atome

In diesem Abschnitt betrachten wir den Begriff der messbaren Indizierung der (zufälligen) Atome von Poisson-Prozessen, der einen konstruktiven Zugang zu Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^d$  und somit die mathematische Grundlage von Simulationsalgorithmen bildet.

**Beachte** Man sagt, dass die Folge  $\{\tilde{S}_i\}$  von Zufallsvektoren  $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  mit

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} S_i, & \text{falls } N \geq i, \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (15)$$

eine *messbare Indizierung* der (zufälligen) Atome des in (11) gegebenen zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  ist.

Von nun an werden wir stets voraussetzen, dass das Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  *diffus* ist, d.h., es gelte

$$\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (16)$$

Der folgende Hilfssatz wird manchmal *Disjunktheitstheorem* genannt. Wir nutzen dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass man auch für Poissonsche Zählmaße mit einem beliebigen (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß eine messbare Indizierung der Atome konstruieren kann.

#### Lemma 3.1

- Seien  $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  und  $\{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  zwei unabhängige Poisson-Prozesse mit den Intensitätsmaßen  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$ , so dass  $0 < \mu_1(\mathbb{R}^d), \mu_2(\mathbb{R}^d) < \infty$ .
- Außerdem seien  $\{\tilde{S}_i^{(1)}\}$  und  $\{\tilde{S}_i^{(2)}\}$  unabhängige messbare Indizierungen der Atome von  $\{N_B^{(1)}\}$  bzw.  $\{N_B^{(2)}\}$ , die gemäß (15) gegeben sind.
- Dann gilt für beliebige  $i, j \geq 1$

$$P(\{\tilde{S}_i^{(1)} \neq \tilde{S}_j^{(2)}\} \cup \{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)} = \infty\}) = 1. \quad (17)$$

**Beweis**

- Es genügt zu zeigen, dass für beliebige  $i, j \geq 1$  mit  $i \neq j$

$$P(\{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)}\} \cap \{\tilde{S}_j^{(2)} \neq \infty\}) = 0.$$

- Mit der Schreibweise  $p^{(k)}(B) = \mu_k(B)/\mu_k(\mathbb{R}^d)$  für  $k = 1, 2$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ergibt sich aus der Unabhängigkeit der Zufallsvektoren  $\tilde{S}_i^{(1)}$  und  $\tilde{S}_j^{(2)}$ , dass

$$\begin{aligned} P(\{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)}\} \cap \{\tilde{S}_j^{(2)} \neq \infty\}) &= P(\{S_i^{(1)} = S_j^{(2)}\} \cap \{N^{(2)} \geq j\}) \\ &= P(N^{(2)} \geq j) P(S_i^{(1)} = S_j^{(2)}) = P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} P(S_i^{(1)} = S_j^{(2)} \mid S_j^{(2)} = s) P(S_j^{(2)} \in ds) \\ &= P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} P(S_i^{(1)} = s) p^{(2)}(ds) = P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} p^{(1)}(\{s\}) p^{(2)}(ds) = 0, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit die Tatsache genutzt wurde, dass das Intensitätsmaß  $\mu_1$  diffus ist und dass somit  $p^{(1)}(\{s\}) = 0$  für jedes  $s \in \mathbb{R}^d$ .  $\square$

**Beachte** Aus Lemma 3.1 ergibt sich insbesondere, dass durch  $\{\tilde{S}_i\}$  mit

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} S_i^{(1)}, & \text{falls } N_{\mathbb{R}^d}^{(1)} \geq i, \\ S_{i-N_{\mathbb{R}^d}^{(1)}}^{(2)}, & \text{falls } N_{\mathbb{R}^d}^{(1)} + N_{\mathbb{R}^d}^{(2)} \geq i > N_{\mathbb{R}^d}^{(1)}, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (18)$$

eine messbare Indizierung der Atome des zufälligen Maßes  $\{N_B\}$  mit  $N_B = N_B^{(1)} + N_B^{(2)}$  gegeben ist.

Wir übertragen nun den in (18) gegebenen Ansatz auf den Fall von beliebigen (endlichen bzw. abzählbar unendlichen) Summen unabhängiger Poisson-Prozesse.

**Theorem 3.6** Sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  ein beliebiges diffuses und lokal endliches Maß. Dann gibt es eine Folge  $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  von Zufallsvektoren, so dass das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$N_B = \#\{i : S_i \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (19)$$

ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$  ist.

**Beweis**

- Man kann sich leicht überlegen, dass sich  $\mu$  als (abzählbar unendliche) Summe von endlichen Maßen  $\mu_1, \mu_2, \dots : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  darstellen lässt, so dass

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (20)$$

- Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\mu_j(\mathbb{R}^d) > 0$  für jedes  $j \geq 1$ .
- Gemäß Korollar 3.1 gibt es dann für jedes  $j \geq 1$  unabhängige Zufallsvariablen  $N^{(j)}, S_1^{(j)}, S_2^{(j)}, \dots$  mit

$$N^{(j)} \sim \text{Poi}(\mu_j(\mathbb{R}^d)), \quad S_i^{(j)} \sim \frac{\mu_j(\cdot)}{\mu_j(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1,$$

– so dass durch den Ansatz

$$N_B^{(j)} = \#\{i : 1 \leq i \leq N^{(j)}, S_i^{(j)} \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Poisson-Prozess  $\{N_B^{(j)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu_j$  gegeben ist.

- Dabei können die Folgen  $\{N^{(1)}, S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots\}, \{N^{(2)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots\}, \dots$  so gewählt werden, dass sie ihrerseits unabhängig sind.
- Damit sind auch die Poisson-Prozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  unabhängig.
- Aus Theorem 3.4 ergibt sich nun, dass das zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  mit  $N_B = \sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$  ist.
- Darüber hinaus ergibt sich aus Lemma 3.1, dass durch die Folge  $\{S_i\}$  von Zufallsvektoren mit

$$S_i = \begin{cases} S_i^{(1)}, & \text{falls } N^{(1)} \geq i, \\ S_{i-N^{(1)}}^{(2)}, & \text{falls } N^{(1)} + N^{(2)} \geq i > N^{(1)}, \\ \vdots \\ S_{i-N^{(1)}-\dots-N^{(j-1)}}^{(j)}, & \text{falls } N^{(1)} + \dots + N^{(j)} \geq i > N^{(1)} + \dots + N^{(j-1)} \text{ für ein } j > 2, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$  gegeben ist, so dass (19) gilt.  $\square$

### 3.3 Transformationssätze

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei verschiedene Arten von Transformationen von Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^d$ .

#### 3.3.1 Translation und Skalierung

Das folgende Theorem erfasst als Spezialfälle die Translation bzw. Skalierung der Punkte von Poisson-Prozessen.

Für beliebige  $d, d' \geq 1$  seien die Borel-Mengen  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $E' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$  gegeben.

- Außerdem sei  $\mathbf{T} : E \rightarrow E'$  eine Borel-messbare Abbildung, d.h., es gelte

$$\mathbf{T}^{-1}(B') = \{x \in E : \mathbf{T}(x) \in B'\} \in \mathcal{B}(E) \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E'),$$

- wobei die Urbilder von beschränkten Borel-Mengen beschränkt seien, d.h., es gelte

$$\mathbf{T}^{-1}(B') \in \mathcal{B}_0(E) \quad \forall B' \in \mathcal{B}_0(E').$$

**Beachte** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein beliebiges Zählmaß in  $E$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, \infty]$ . Man kann sich leicht überlegen, dass dann durch den Ansatz

$$N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E') \quad (21)$$

ein zufälliges Zählmaß  $\{N'_{B'}, B' \in \mathcal{B}(E')\}$  in  $E'$  gegeben ist, wobei das Intensitätsmaß  $\mu' : \mathcal{B}(E') \rightarrow [0, \infty]$  von  $\{N'_{B'}\}$  gegeben ist durch

$$\mu'(B') = \mathbb{E} N'_{B'} \stackrel{(21)}{=} \mathbb{E} N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} = \mu(\mathbf{T}^{-1}(B')) \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E'). \quad (22)$$

**Theorem 3.7** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein Poisson-Prozess in  $E$  mit dem (diffusen und lokal endlichem) Intensitätsmaß  $\mu$ .

- Dann ist das in (21) gegebene zufällige Zählmaß  $\{N'_{B'}, B' \in \mathcal{B}(E')\}$  ein Poisson-Prozess in  $E'$ , dessen Intensitätsmaß  $\mu'$  durch (22) gegeben ist.
- Wenn  $\{S_i\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$  ist und wenn die Abbildung  $\mathbf{T} : E \rightarrow E'$  eineindeutig ist, dann ist durch

$$S'_i = \mathbf{T}'(S_i) \quad (23)$$

eine messbare Indizierung  $\{S'_i\}$  der Atome von  $\{N'_{B'}\}$  gegeben, wobei die Abbildung  $\mathbf{T}' : E \cup \{\infty\} \rightarrow E' \cup \{\infty\}$  gegeben ist durch

$$\mathbf{T}'(x) = \begin{cases} \mathbf{T}(x), & \text{falls } x \in E, \\ \infty, & \text{falls } x = \infty. \end{cases}$$

**Beweis**

- Offenbar gilt  $N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} \sim \text{Poi}(\mu(\mathbf{T}^{-1}(B')))$ .
- Wenn  $B'_1, \dots, B'_n \in \mathcal{B}_0(E')$  paarweise disjunkte Borel-Mengen sind, dann sind auch die Urbilder  $\mathbf{T}^{-1}(B'_1), \dots, \mathbf{T}^{-1}(B'_n)$  paarweise disjunkt und die Zufallsvariablen

$$N'_{B'_1} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B'_1)}, \dots, N'_{B'_n} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B'_n)}$$

sind somit unabhängig.

- Außerdem ist die Abbildung  $S'_i = \mathbf{T}'(S_i) : \Omega \rightarrow E' \cup \{\infty\}$  für jedes  $i \geq 1$  messbar, weil die Abbildungen  $S_i : \Omega \rightarrow E \cup \{\infty\}$  und  $\mathbf{T}' : E \cup \{\infty\} \rightarrow E' \cup \{\infty\}$  messbar sind, und es gilt für jedes  $B' \in \mathcal{B}(E')$

$$N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} = \#\{i : S_i \in \mathbf{T}^{-1}(B')\} = \#\{i : \mathbf{T}'(S_i) \in B'\}.$$

- Also ist  $\{\mathbf{T}'(S_i)\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N'_{B'}\}$ . □

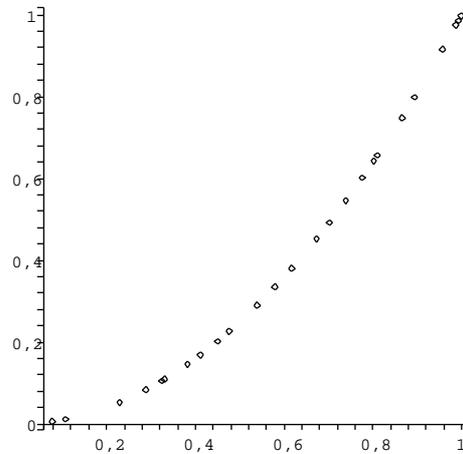


Abbildung 23: Poisson-Prozess auf der Parabel  $\mathbf{T}(x) = (x, x^2)$

**Beispiele** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein homogener Poisson-Prozess in  $E = (0, \infty)$  mit der Intensität  $\lambda = 1$ .

1. Sei  $E' = E = (0, \infty)$  und  $\mathbf{T}(x) = x^2$ .
  - Dann ist  $\{N'_{B'}\}$  ein Poisson-Prozess in  $(0, \infty)$ .
  - Das Intensitätsmaß  $\mu'$  von  $\{N'_{B'}\}$  ist absolutstetig bezüglich dem (1-dimensionalen) Lebesgue-Maß  $\nu_1(\cdot \cap (0, \infty))$ , wobei die Dichte gegeben ist durch

$$\frac{d\mu'}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0.$$

2. Sei  $E' = E \times E$  und die Abbildung  $\mathbf{T} : E \rightarrow E \times E$  sei gegeben durch  $\mathbf{T}(x) = (x, x^2)$ .
  - Dann ist die Folge  $\{S_i\}$  der Sprungzeitpunkte des (Poissonschen) Zählprozesses  $\{N_t, t > 0\}$  mit  $N_t = N_{(0,t]}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$ .
  - Außerdem ist  $\{S'_i\} = \{(S_i, S_i^2)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses  $\{N'_{B'}\}$  in  $(0, \infty)^2$ ,

- dessen Intensitätsmaß  $\mu'$  auf dem Funktionsgraphen  $\{(x, x^2) : x > 0\}$  konzentriert ist.
- Beachte: Das heißt insbesondere, dass die Atome von  $\{N'_{B'}\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 in einer 1-dimensionalen Teilmenge von  $(0, \infty)^2$  liegen; vgl. Abbildung 23.

### 3.3.2 Transformation in höherdimensionale Räume

Wir betrachten nun noch eine andere Art der Transformation von Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^d$ , mit deren Hilfe man Poisson-Prozesse  $\{N'_{B'}\}$  in höherdimensionalen Räumen  $E' \subset \mathbb{R}^{d'}$  mit  $d' > d$  konstruieren kann, so dass der Träger des Intensitätsmaßes  $\mu'$  von  $\{N'_{B'}\}$  eine  $d'$ -dimensionale Menge ist.

#### Theorem 3.8

- Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein Poisson-Prozess in  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ , so dass  $\mu(E) > 0$ , und sei  $\{S_i\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$ .
- Außerdem sei  $m \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl und  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren mit der Verteilung  $P_U$ , die von  $\{S_i\}$  unabhängig sind.
- Dann ist durch

$$N'(B \times C) = \#\{i : (S_i, U_i) \in B \times C\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad (24)$$

ein Poisson-Prozess  $\{N'_{B'}\}$  in  $E' = E \times \mathbb{R}^m$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu' = \mu \times P_U$  gegeben.

#### Beweis

- Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\mu$  ein endliches Maß ist.
  - Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass die messbare Indizierung  $\{S_i\}$  der Atome von  $\{N_B\}$  durch (10) und (15) gegeben ist.
  - Dann sind die Zufallsvektoren  $S'_1, S'_2, \dots$  mit  $S'_i = (S_i, U_i)$  unabhängig, und es gilt

$$S'_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)} \times P_U \quad \forall i \geq 1.$$

- Aus Korollar 3.1 ergibt sich nun, dass durch den Ansatz

$$N'_{B'} = \#\{i : 1 \leq i \leq N, S'_i \in B'\} \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E \times \mathbb{R}^m)$$

ein Poisson-Prozess  $N'_{B'}$  in  $E' = E \times \mathbb{R}^m$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu'$  gegeben ist, wobei

$$\mu'(B \times C) = \mu(E) \left( \frac{\mu(B)}{\mu(E)} \times P_U(C) \right) = \mu(B) \times P_U(C) \quad \forall B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

- Damit ist die Behauptung unter der zusätzlichen Annahme bewiesen, dass  $\mu$  endlich ist.
- Wenn  $\mu$  ein beliebiges (diffuses und lokal endliches) Maß ist,
  - dann können wir  $\mu' = \mu \times P_U$  als (abzählbar unendliche) Summe von endlichen Mäßen  $\mu'_1, \mu'_2, \dots$  darstellen
  - und anschließend so wie im Beweis von Theorem 3.6 vorgehen. □

### Beachte

- Ähnlich wie bei zusammengesetzten Poisson-Prozessen in  $[0, \infty)$ , die in Abschnitt WT-2.2.2 eingeführt worden sind, können die in Theorem 3.8 betrachteten Zufallsvariablen  $U_i$  als „Marken“ der Atome  $S_i$  aufgefasst werden.
- Dabei sagt man, dass die Folge  $\{(S_i, U_i)\}$  der markierten Atome eine messbare Indizierung eines *unabhängig markierten* Poisson-Prozesses ist.

### 3.3.3 Radiale Simulation

Mit Hilfe der Theoreme 3.7 und 3.8 konstruieren wir einen Algorithmus zur *radialen Simulation* von homogenen Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^2$ .

- Sei  $T_1, T_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $T_i \sim \text{Exp}(1)$  für jedes  $i \geq 1$ .
- Für jedes  $\lambda > 0$  ergibt sich dann aus Theorem 3.7, dass durch

$$N_B = \# \left\{ i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{T_k}{\pi\lambda}} \in B \right\} \quad \forall B \in \mathcal{B}([0, \infty))$$

ein Poisson-Prozess  $\{N_B, B \in \mathcal{B}([0, \infty))\}$  in  $[0, \infty)$  gegeben ist, dessen Intensitätsmaß  $\mu$  absolutstetig ist mit der Dichte

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = 2\pi\lambda x \quad \forall x \geq 0.$$

- Dabei ist durch

$$S_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{T_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1$$

eine messbare Indizierung  $\{S_i\}$  der Atome von  $\{N_B\}$  gegeben.

- Außerdem sei  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 2\pi)$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $U_i \sim U([0, 2\pi))$ , die unabhängig von  $\{T_i\}$  ist.
- Dann ergibt sich aus Theorem 3.8, dass  $\{(S_i, U_i)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in  $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$  ist, dessen Intensitätsmaß durch  $\mu \times U(0, 2\pi)$  gegeben ist.

- Die erneute Anwendung von Theorem 3.7 auf die Abbildung  $\mathbf{T} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\mathbf{T}(s, u) = (s \cos u, s \sin u) \quad \forall s \geq 0, u \in [0, 2\pi) \quad (25)$$

ergibt schließlich, dass  $\{\mathbf{T}(S_i, U_i)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses im  $\mathbb{R}^2$  mit der Intensität  $\lambda$  ist.

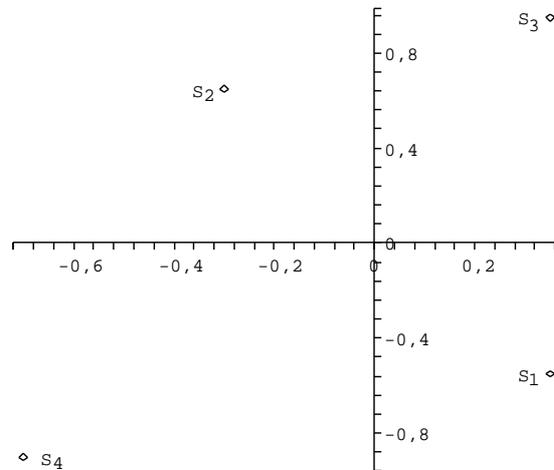


Abbildung 24: Radiale Simulation von homogenen Poisson-Prozessen

Um einen homogenen Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  im Kreis  $B(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$  mit Radius  $r > 0$  zu simulieren, kann man also wie folgt vorgehen:

**Schritt 0** Generiere die Pseudozufallszahlen  $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$  gemäß der Verteilung  $\text{Exp}(1)$ , wobei

$$n(r) = \max \left\{ i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r \right\}.$$

**Schritt 1** Generiere die Pseudozufallszahlen  $u_1, u_2, \dots, u_{n(r)}$  gemäß der Verteilung  $U(0, 2\pi)$ .

**Schritt 2** Berechne die Vektoren  $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$ , wobei

$$s_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1.$$

**Schritt 3** Transformiere die Vektoren  $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$  mit Hilfe der in (25) gegebenen Abbildung  $\mathbf{T} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Schritt 4** Generiere so die Realisierung  $\mathbf{T}(s_1, u_1), \dots, \mathbf{T}(s_{n(r)}, u_{n(r)})$  eines (2-dimensionalen) homogenen Poisson-Prozesses im Kreis  $B(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$ ; vgl. Abbildung 24.

### 3.3.4 Ortsabhängige Verdünnung von Poisson-Prozessen; Simulationsalgorithmus

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass das Intensitätsmaß  $\mu$  des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  absolutstetig bezüglich des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h., es gibt eine Borel-messbare Funktion  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (26)$$

wobei  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  die *Intensitätsfunktion* von  $\{N_B\}$  genannt wird.

Aus den Transformationssätzen, die in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 hergeleitet worden sind, ergibt sich die folgende Invarianzeigenschaft von Poisson-Prozessen bezüglich ortsabhängiger Verdünnung, vgl. Abbildung 25.

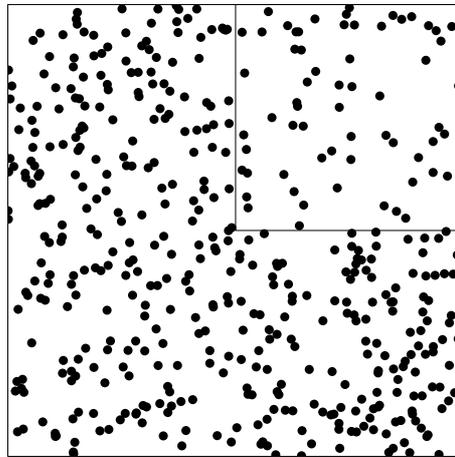


Abbildung 25: Ortsabhängige Verdünnung der Punkte;  $p(x) = 1$  bzw.  $p(x) = 0.5$

#### Theorem 3.9

- Seien  $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  zwei Borel-messbare und lokal-integrierbare Funktionen, so dass

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (27)$$

- Sei  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion  $\lambda_1$ .
- Außerdem sei  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Folge von unabhängigen und im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen, die von  $\{S_n\}$  unabhängig ist.
- Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$\tilde{N}_B = \#\{n : S_n \in B, U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n)\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (28)$$

ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion  $\lambda_2$ .

### Beweis

- Aus Theorem 3.8 ergibt sich, dass  $\{(S_n, U_n)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in  $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$  mit der Intensitätsfunktion  $\lambda(x, u) = \lambda_1(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$  ist.
- Aus Theorem 3.7 ergibt sich nun, dass  $\{(S_n, U'_n)\}$  mit

$$U'_n = \begin{cases} U_n, & \text{falls } U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n), \\ 2, & \text{falls } U_n > \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n) \end{cases}$$

eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in  $\mathbb{R}^d \times ([0, 1] \cup \{2\})$  ist, dessen Intensitätsmaß  $\mu'$  gegeben ist durch

$$\mu'(B \times [0, 1]) = \int_B \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[0, \lambda_2(x)/\lambda_1(x)]}(u) \, du \, \lambda_1(x) \, dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Hieraus folgt, dass

$$\mu'(B \times [0, 1]) = \int_B \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)} \lambda_1(x) \, dx = \int_B \lambda_2(x) \, dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Damit ist gezeigt, dass  $\{\tilde{N}_B\}$  ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion  $\lambda_2$  ist.  $\square$

Mit Hilfe von Theorem 3.9 lässt sich ein Algorithmus zur Simulation von Poisson-Prozessen angeben, deren Intensitätsfunktion eine beschränkte Funktion ist. Hierfür ist das folgende Korollar nützlich, dass sich unmittelbar aus Theorem 3.9 ergibt.

### Korollar 3.2

- Sei  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität  $\lambda$ .
- Sei  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Folge von unabhängigen und in  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen, die von  $\{S_n\}$  unabhängig ist, und sei  $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  eine Borel-messbare Funktion.

- Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$\tilde{N}_B = \#\{n : S_n \in B, U_n \leq p(S_n)\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (29)$$

ein Poisson-Prozess, dessen Intensitätsfunktion  $\tilde{\lambda} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  gegeben ist durch

$$\tilde{\lambda}(x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (30)$$

Um einen Poisson-Prozess mit einer vorgegebenen beschränkten Intensitätsfunktion  $\lambda : C \rightarrow [0, \infty)$  in einer beschränkten Borel-Menge  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  zu simulieren, kann man also wie folgt vorgehen, vgl. auch Abbildung 25:

**Schritt 0** Generiere die Realisierungen  $s_1, s_2, \dots, s_k \in C$  der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  in  $C$ , dessen Intensität  $\lambda_{\max}$  gegeben ist durch

$$\lambda_{\max} = \sup_{x \in C} \lambda(x) < \infty.$$

**Schritt 1** Generiere die Realisierungen  $u_1, u_2, \dots, u_k \in [0, 1]$  der unabhängigen und in  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_1, U_2, \dots, U_k$ .

**Schritt 2** Eliminiere diejenigen Punkte  $s_n$ , für die  $u_n > \lambda(s_n)/\lambda_{\max}$  gilt.

**Schritt 3** Die verbleibenden Punkte  $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_m}\} \subset \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  bilden dann eine Realisierung eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion  $\lambda : C \rightarrow [0, \infty)$  in der Menge  $C$ .

### 3.4 Konnektivitätseigenschaften

#### 3.4.1 Kritische Eckpunktintensität von $r$ -Graphen

- In diesem Abschnitt betrachten wir Konnektivitätseigenschaften der folgenden Familie von Graphen  $G = (\Xi_\lambda, r)$ , wobei

- die Menge der Eckpunkte  $\Xi_\lambda = \{S_n\} \cup \{o\} \subset \mathbb{R}^d$  die (zufällige) Menge der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$  mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$  ist, zu der der Nullpunkt hinzugefügt wird,
- und das (zufällige) Kantensystem  $E$  von  $G$  gegeben ist durch

$$E = \{(v, v') \in \Xi_\lambda \times \Xi_\lambda : 0 < |v - v'| \leq r\}$$

für eine beliebige positive Zahl  $r > 0$ .

- Aus Theorem 3.7 ergibt sich, dass die skalierte zufällige Menge  $\{r^{-1}S_n\}$  die Menge der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität  $r^d\lambda$  ist.

- Die beiden Graphen  $G = (\Xi_\lambda, r)$  und  $G' = (\Xi_{r^d\lambda}, 1)$  besitzen also die gleichen (stochastischen) Konnektivitätseigenschaften.
- Deshalb werden wir im Folgenden (o.B.d.A.) annehmen, dass  $r = 1$ .
- So wie bisher schreiben wir  $v \sim v'$  für  $v, v' \in \Xi_\lambda$  mit  $v \neq v'$ , wenn es ein  $n \geq 1$  und eine (endliche) Folge von Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n \in \Xi_\lambda$  gibt, so dass  $v_0 = v$ ,  $v_n = v'$  und  $(v, v_1), \dots, (v_{n-1}, v') \in E$ .
  - Sei  $C_o = \{S_n : o \sim S_n\}$  der (zufällige) Site-Cluster, der den Nullpunkt enthält, und sei  $p_k(\lambda) = \mathbb{P}(|C_o| = k)$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Cluster  $C_o$  genau  $k$  Eckpunkte enthält.
  - Die Wahrscheinlichkeit  $p_\infty(\lambda)$  mit

$$p_\infty(\lambda) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\lambda),$$

d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass der Cluster  $C_o$  unendlich viele Eckpunkte enthält, wird *Perkolationswahrscheinlichkeit* genannt.

- Die *kritische (Eckpunkt-) Intensität*  $\lambda_c$  ist definiert durch  $\lambda_c = \inf\{\lambda > 0 : p_\infty(\lambda) > 0\}$ .

**Theorem 3.10** Für jedes  $d \geq 2$  gilt  $0 < \lambda_c < \infty$ .

### Beweis

- Wir beweisen die Behauptung nur für den Fall  $d = 2$ . Für beliebiges  $d \geq 2$  verläuft der Beweis analog.
- Wir zeigen zunächst, dass  $\mathbb{P}(|C_o| < \infty) = 1$ , wenn  $\lambda > 0$  hinreichend klein ist.
- Hierfür zerlegen wir die Punktmenge  $C_o$ 
  - in Punkte der ersten Generation, die direkt mit dem Nullpunkt verbunden sind,
  - in Punkte der zweiten Generation, die über genau einen Zwischenpunkt mit dem Nullpunkt verbunden sind, usw.
- Dabei hat jeder Punkt in  $C_o$  höchstens eine Poisson-verteilte zufällige Anzahl von unmittelbaren Nachkommen, deren Erwartungswert gleich  $\lambda\pi$  ist.
- Um den Erwartungswert  $\mathbb{E}|C_o|$  nach oben abzuschätzen, betrachten wir einen Verzweigungsprozess  $Z_1, Z_2, \dots : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$  vom Galton-Watson-Typ
  - mit  $Z_1 = 1$  und  $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_i^{(n)}$  für jedes  $n \geq 1$ ,
  - wobei  $\{N_i^{(n)}, i, n \geq 1\}$  eine Doppelfolge von unabhängigen und identisch (Poisson-) verteilten Zufallsvariablen ist mit  $N_i^{(n)} \sim \text{Poi}(\lambda\pi)$ .
- Man kann sich leicht überlegen,
  - dass dann stets  $\mathbb{E}|C_o| \leq \mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}Z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}Z_n$  gilt
  - und dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\pi)^n < \infty$ , wenn  $\lambda < \pi^{-1}$ .
- Hieraus ergibt sich, dass  $\lambda_c > 0$ .

- Wir zeigen nun umgekehrt, dass  $\mathbb{P}(|C_o| = \infty) > 0$ , wenn  $\lambda > 0$  hinreichend groß ist.
- Hierfür legen wir ein quadratisches Gitter über die euklidische Ebene, dessen Zellen die Kantenlänge  $1/4$  besitzen.
- Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit  $p$  dafür, dass es in einer beliebigen (jedoch vorgegebenen) Zelle des Gitters mindestens einen Punkt des Poisson-Prozesses gibt,
  - wobei wir dieses Ereignis als Aktivierung des entsprechenden Eckpunktes des dualen quadratischen Gitters interpretieren
  - und die Aktivierung der Eckpunkte unabhängig voneinander erfolgt.
- Aus Theorem 2.8 ergibt sich, dass  $p_c^s < 1$  für das quadratische Gitter  $\mathbb{Z}^2$  gilt.
- Man kann sich leicht überlegen, dass  $p > p_c^s$ , wenn  $\lambda$  hinreichend groß ist.
- Hieraus ergibt sich, dass in diesem Fall die Nullpunkt-Zelle mit positiver Wahrscheinlichkeit zu einem unendlichen Cluster von aktivierten Zellen des quadratischen Gitters gehört.
- Weil dieses Ereignis impliziert, dass  $|C_o| = \infty$ , ergibt sich hieraus, dass  $\lambda_c < \infty$ .

#### Beachte

- Die exakten Zahlenwerte von  $\lambda_c$  und von  $p_\infty(\lambda)$  für  $\lambda \geq \lambda_c$  sind unbekannt.
- Für  $d = 2$  wurde mit Monte-Carlo-Simulation gezeigt, dass  $1 - \exp(-\lambda_c \pi/4) \approx 0.676$ , d.h.  $\lambda_c \approx 1.44$ .
- Außerdem gelten für  $d = 2$  die Abschätzungen  $0.969 < \lambda_c < 3.372$ .
- Für  $d = 3$  wurde mit Monte-Carlo-Simulation gezeigt, dass  $1 - \exp(-(4\pi/3)\lambda_c/8) \approx 0.290$ .

#### 3.4.2 Existenz unendlicher Cluster

- Wir betrachten nun eine weitere Konnektivitätseigenschaft der Graphen, die in Abschnitt 3.4.1 eingeführt worden sind.
  - Dabei sei jetzt die Menge der Eckpunkte  $\Xi_\lambda = \{S_n\} \subset \mathbb{R}^d$  die (zufällige) Menge der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$  mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$  ist, ohne dass der Nullpunkt hinzugefügt wird.
  - Das Kantensystem sei so wie bisher gegeben durch

$$E = \{(v, v') \in \Xi_\lambda \times \Xi_\lambda : |v - v'| \leq 1\}.$$

- Für jedes  $n \geq 1$  bezeichnen wir mit  $C_n = \{S_m : S_m \sim S_n\}$  den Site-Cluster, der den Eckpunkt  $S_n$  des Poisson-Prozesses enthält.
  - Man kann sich leicht überlegen, dass

$$\mathbb{P}(|C_n| = \infty) = p_\infty(\lambda) \quad \text{für jedes } n \geq 1$$

gilt, wobei  $p_\infty(\lambda) = \mathbb{P}(|C_o| = \infty)$  mit  $C_o = \{S_n : o \sim S_n\}$  die in Abschnitt 3.4.1 eingeführte Perkolationswahrscheinlichkeit ist.

- Außerdem kann man zeigen, dass die Existenz von unendlichen Site-Clustern eng mit der kritischen Eckpunktintensität  $\lambda_c = \inf\{\lambda > 0 : p_\infty(\lambda) > 0\}$  zusammenhängt.

- Und zwar gilt das folgende Analogon von Theorem 2.3.

**Theorem 3.11** Sei  $A = \{|C_n| = \infty \text{ für ein } n \geq 1\}$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda < \lambda_c, \\ 1, & \text{wenn } \lambda > \lambda_c. \end{cases} \quad (31)$$

### 3.4.3 Ergodizität ergodischer Systeme

Um das Theorem 3.11 zu beweisen, kann man den Begriff der Ergodizität dynamischer Systeme verwenden, den wir in diesem Abschnitt erläutern.

- Zur Erinnerung: Mit  $\mathbb{N}$  wird die Familie aller lokal endlichen Zählmaße  $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$  bezeichnet, d.h., es gilt  $\varphi(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und  $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$  für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

- Außerdem betrachten wir

- die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , wobei  $\mathcal{N}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{N}$  ist, so dass  $\varphi \mapsto \varphi(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist,
- und die Familie  $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von  $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ -messbaren Verschiebungsoperatoren  $\mathbf{T}_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so dass

$$(\mathbf{T}_x \varphi)(B) = \varphi(B + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (32)$$

d.h., jedem Zählmaß  $\varphi = \sum_n a_n \delta_{s_n}$  aus  $\mathbb{N}$  wird das Zählmaß  $\mathbf{T}_x \varphi = \sum_n a_n \delta_{s_n - x}$  zugeordnet, wobei sämtliche Atome von  $\varphi$  um den Vektor  $-x$  verschoben werden.

- Die „Gewichte“  $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  der Atome  $s_n$  bleiben dabei unverändert.

- Man sagt, dass das zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  stationär ist,

- wenn seine Verteilung  $P_N$  invariant bezüglich  $\{\mathbf{T}_x\}$  ist, wobei  $P_N(A) = P(N \in A)$  für jedes  $A \in \mathcal{N}$ ,

- d.h., wenn

$$P_N(A) = P_N(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{N}, \quad (33)$$

wobei  $\mathbf{T}_x A = \{\mathbf{T}_x \varphi : \varphi \in A\}$ .

#### Beachte

- Wenn der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N)$  mit der in (32) eingeführten Familie  $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von (maßerhaltenden) Verschiebungsoperatoren ergänzt wird, für die (33) gilt, dann sagt man, dass  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$  ein *dynamisches System* ist.

- Die in (32) eingeführte Familie  $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von Verschiebungsoperatoren besitzt die Eigenschaft einer (algebraischen) *Gruppe*, denn offenbar gilt

$$\mathbf{T}_{x+x'} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{x'} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{-x} = \mathbf{I} \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^d.$$

- Im allgemeinen wird als Indexmenge  $G$  der Operatoren-Gruppe  $\{\mathbf{T}_x, x \in G\}$  nicht nur der euklidische Raum  $\mathbb{R}^d$  betrachtet, sondern eine beliebige Abelsche lokalkompakte Hausdorffsche Gruppe  $G$ , die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

### Definition

- Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, und sei  $G$  eine beliebige Abelsche lokalkompakte Hausdorffsche Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.
- Die Verknüpfungsoperation in  $G$  bezeichnet man dabei weiterhin mit „+“.
  - Außerdem sei  $\mathcal{B}(G)$  die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen in  $G$ ,
  - und sei  $\nu : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty]$  das (bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte) *Haarsche Maß*, so dass

$$\nu(B) = \nu(B + x) \quad \forall x \in G, B \in \mathcal{B}(G).$$

- Sei  $\{\mathbf{T}_x, x \in G\}$  eine Familie von eineindeutigen  $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ -messbaren Abbildungen  $\mathbf{T}_x : \Omega \rightarrow \Omega$ . Man sagt, dass  $\{\mathbf{T}_x\}$  eine *Strömung* (bzw. ein *Flow*) in  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist, wenn

$$P(A) = P(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in G, A \in \mathcal{A},$$

$$\mathbf{T}_{x+x'} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{x'} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{-x} = \mathbf{I} \quad \forall x, x' \in G,$$

$$\{(x, \omega) : \mathbf{T}_x \omega \in A\} \in \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

- Wenn  $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x\}$  eine Strömung in  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist, dann sagt man, dass das Quadrupel  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ein *dynamisches System* ist.

Die zentrale Frage der Ergodizität dynamischer Systeme hängt eng mit den beiden folgenden Fragestellungen zusammen.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ein beliebiges dynamisches System, und sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Zufallsvariable, so dass  $\mathbb{E}|X| < \infty$ . Außerdem sei  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$  eine Folge von Borelschen Teilmengen der Index-Menge  $G$  mit  $0 < \nu(W_n) < \infty$  für jedes  $n \geq 1$ .

- 1) Unter welchen Bedingungen existiert der Grenzwert

$$\overline{X}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} X(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) \quad (34)$$

für  $P$ -fast jedes  $\omega \in \Omega$ , wobei  $\nu : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty]$  das Haarsche Maß ist.

2) Wann gilt für die in (34) gegebene Zufallsvariable  $\overline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$\overline{X} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{I}), \quad (35)$$

wobei  $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{I})$  die bedingte Erwartung von  $X$  bezüglich der  $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A} : A = \mathbf{T}_x A \ \forall x \in G\}.$$

aller  $\mathbf{T}$ -invarianten Mengen aus  $\mathcal{A}$  ist.

Das folgende Resultat, dass in der Literatur *individueller Ergodensatz* genannt wird, gibt eine Antwort auf diese beiden Fragen.

**Theorem 3.12** Sei  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$  eine Folge von Borelschen Teilmengen der Index-Menge  $G$ , so dass

$$W_n \subset W_{n+1} \quad \text{und} \quad 0 < \nu(W_n) < \infty \quad \forall n \geq 1, \quad (36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(W_n \cap (W_n - x))}{\nu(W_n)} = 1 \quad \forall x \in G \quad (37)$$

und

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\nu(W_n - W_n)}{\nu(W_n)} < \infty, \quad (38)$$

wobei  $W_n - W_n = \{x - y : x, y \in W_n\}$ . Dann existiert der Grenzwert in (34) für  $P$ -fast jedes  $\omega \in \Omega$ , und es gilt (35).

Einen Beweis von Theorem 3.12 findet man beispielsweise in dem Buch von A.A. Tempelman (1992), *Ergodic Theorems for Group Actions: Informational and Thermodynamical Aspects*, Kluwer, Dordrecht.

**Beachte** Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass der Grenzwert  $\overline{X}(\omega)$  in (34) existiert und  $P$ -fast sicher konstant ist. Dann ergibt sich aus (35), dass

$$\overline{X} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{I}) = \mathbb{E}X, \quad (39)$$

d.h., das „Raummittel“  $\overline{X}$  stimmt mit dem „Scharmittel“  $\mathbb{E}X$  überein.

### Definitionen

- Eine Folge  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$  von Borelschen Teilmengen der Index-Menge  $G$ , die den Bedingungen (36) – (38) genügt, wird *mittelnde Folge* genannt.
- Man sagt, dass das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  *ergodisch* ist, wenn für jede integrierbare Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und für jede mittelnde Folge  $\{W_n\}$  gilt, dass die in (34) gegebene Zufallsvariable  $\overline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant ist.

- Ein stationäres zufälliges Zählmaß  $\{N_B\}$  heißt *ergodisch*, wenn das dynamische System  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$  ergodisch ist.

In der Literatur werden weitere (äquivalente) Definitionsmöglichkeiten für die Ergodizität von dynamischen Systemen betrachtet. Wir erwähnen hier zunächst zwei solcher Ergodizitätskriterien, ohne sie zu beweisen.

**Theorem 3.13** *Das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ist genau dann ergodisch, wenn*

$$\max\{P(A), P(A^c)\} = 1 \quad \forall A \in \mathcal{I} \quad (40)$$

oder wenn jede Darstellung

$$P = pP' + (1-p)P'' \quad \text{mit } p \in [0, 1] \quad (41)$$

des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  als Mischung zweier  $\mathbf{T}$ -invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße  $P', P''$  über  $\mathcal{A}$  trivial ist, d.h., wenn  $\max\{p, 1-p\} = 1$  oder  $P' = P''$ .

#### Beachte

- Die Bedingung (40) bedeutet, dass die  $\mathbf{T}$ -invarianten Teilmengen  $A \in \mathcal{I}$  eines ergodischen dynamischen Systems  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  nur die Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 besitzen können.
- Es ist klar, dass jede Linearkombination (41) von  $\mathbf{T}$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $P', P''$  über  $\mathcal{A}$  erneut ein  $\mathbf{T}$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ergibt. In diesem Sinne bildet die Familie aller  $\mathbf{T}$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße über  $\mathcal{A}$  einen *Simplex*.
- Die Bedingung (41) bedeutet, dass die ergodischen  $\mathbf{T}$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße über  $\mathcal{A}$  die *Eckpunkte* dieses Simplex bilden.

Mit Hilfe von Theorem 3.13 lässt sich auf einfache Weise noch ein drittes Ergodizitätskriterium herleiten.

**Theorem 3.14** *Das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ist genau dann ergodisch, wenn es eine mittelnde Folge  $\{W_n\}$  gibt, so dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) = P(A)P(A') \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}. \quad (42)$$

#### Beweis

- Wir nehmen zunächst an, dass das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ergodisch ist, und zeigen, dass (42) für jede mittelnde Folge  $\{W_n\}$  gilt.

- Aus der  $\mathbf{T}$ -Invarianz des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  ergibt sich, dass für beliebige  $A, A' \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(\mathbf{T}_{-x} A \cap A') \nu(dx) \\ &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \int_{A'} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) P(d\omega) \nu(dx) = \int_{A'} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) P(d\omega) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) - P(A) P(A') \right| &= \left| \int_{A'} \left( \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right) P(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{A'} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right| P(d\omega). \end{aligned}$$

- Um die Gültigkeit von (42) zu beweisen, ist zu zeigen, dass der letzte Ausdruck gegen 0 strebt für  $n \rightarrow \infty$ .
  - Dies ergibt sich aus dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, denn es gilt

$$\left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right| \leq 1,$$

- und mit  $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$  ergibt sich aus (34) und (39), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) = \mathbb{E} \mathbb{1}_A = P(A).$$

- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass (42) für eine mittelnde Folge  $\{W_n\}$  gilt.
  - Für  $A = A' \in \mathcal{I}$  gilt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A) \nu(dx) = \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A) \nu(dx) \\ &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) \longrightarrow P(A) P(A'), \end{aligned}$$

d.h., es gilt  $P(A) = (P(A))^2$  bzw.  $\max\{P(A), P(A^c)\} = 1$ .

- Aus der Bedingung (40) in Theorem 3.13 ergibt sich somit, dass  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ergodisch ist.  $\square$

Aus dem Ergodizitätskriterium in Theorem 3.14 ergibt sich dann das folgende Resultat.

**Korollar 3.3** Sei  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$ . Dann ist  $\{N_B\}$  ergodisch.

Ein *Beweis* von Korollar 3.3 ist beispielsweise in Abschnitt 3.4.3 des Vorlesungsskriptes „Räumliche Statistik“ enthalten.

### 3.5 Asymptotische Konnektivitätseigenschaften von $r$ -Graphen

- In diesem Abschnitt betrachten wir asymptotische Konnektivitätseigenschaften von so genannten  $r$ -Graphen  $G = (V, E)$ , die bereits in Abschnitt 3.4.1 eingeführt worden sind.
- Um die Notation einfach zu halten, beschränken wir uns jetzt auf den planaren Fall, d.h.  $d = 2$ , obwohl die meisten Ergebnisse dieses Abschnittes auch für beliebige Dimensionen  $d \geq 2$  gelten.
- Zur Erinnerung:

- Die Menge der Eckpunkte  $V$  ist die (zufällige) Menge

$$V = \{S_n\} \cup \{o\} \subset \mathbb{R}^2$$

der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses  $\{S_n, n = 1, 2, \dots\}$  in  $\mathbb{R}^2$  mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ , zu der der Nullpunkt  $o \in \mathbb{R}^2$  hinzugefügt wird, wobei  $\lambda = \mathbb{E}\#\{S_n : S_n \in [0, 1]^2\}$ .

- Das (zufällige) Kantensystem  $E \subset V \times V$  von  $G$  gegeben ist durch

$$E = \{(v, v') \in V \times V : 0 < |v - v'| \leq r\},$$

wobei  $r > 0$  eine beliebige positive Zahl ist.

- Aus den Invarianzeigenschaften von Poisson-Prozessen (vgl. Theorem 3.7) ergibt sich, dass
  - die skalierte zufällige Menge  $\{\sqrt{\lambda}S_n\}$  die Menge der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität 1 ist.
  - Deshalb werden wir im Folgenden (o.B.d.A.) annehmen, dass  $\lambda = 1$ .

#### 3.5.1 Kritischer Konnektivitätsradius

- So wie bisher schreiben wir  $v \sim v'$  für  $v, v' \in V$  mit  $v \neq v'$ , wenn es ein  $n \geq 1$  und eine (endliche) Folge von Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n \in V$  gibt, so dass  $v_0 = v$ ,  $v_n = v'$  und  $(v, v_1), \dots, (v_{n-1}, v_n) \in E$ .

- Sei  $C_o = \{S_n : o \sim S_n\}$  der (zufällige) Site-Cluster, der den Nullpunkt enthält, und sei

$$\theta_k(r) = \mathbb{P}(|C_o| = k)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Cluster  $C_o$  genau  $k$  Eckpunkte enthält.

- Die Wahrscheinlichkeit  $\theta(r) = \mathbb{P}(|C_o| = \infty)$ , dass der Site-Cluster  $C_o$  unendlich viele Eckpunkte enthält, ist dann gegeben durch

$$\theta(r) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(r).$$

- Sei  $r_c = \inf\{r : \theta(r) > 0\}$ , wobei  $r_c$  der *kritische Konnektivitätsradius* genannt wird.

- Genauso wie in Theorem 3.10 kann man zeigen, dass  $0 < r_c < \infty$ . Dabei heißt der Graph  $G = (V, E)$  *subkritisch* bzw. *superkritisch*, wenn  $r < r_c$  bzw.  $r > r_c$ .

Das folgende Theorem zeigt, dass superkritische Graphen mit hoher Wahrscheinlichkeit Perkolationpfade in großen (langgestreckten) Rechtecken besitzen.

**Theorem 3.15**

- Der Graph  $G = (V, E)$  sei *superkritisch*, d.h., es gelte  $r > r_c$ , und für beliebige  $\delta \in (0, 1)$  und  $k \in \{1, 2, \dots\}$ 
  - sei  $R_{\delta,k} = [0, \sqrt{k}] \times [0, \delta\sqrt{k}]$ ,
  - und  $\Omega_{\delta,k}$  bezeichne das Ereignis, dass  $G$  einen Site-Cluster  $V_{\delta,k}$  im Rechteck  $R_{\delta,k}$  besitzt, der von links nach rechts verläuft,
  - so dass jeweils mindestens ein Poisson-Punkt aus  $V_{\delta,k}$  einen Abstand zu den beiden kürzeren Seiten von  $R_{\delta,k}$  hat, der kleiner als  $r$  ist, d.h.

$$\left(\{0\} \times [0, \delta\sqrt{k}]\right) \cap \left(V_{\delta,k} \oplus b(o, r)\right) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \left(\{\sqrt{k}\} \times [0, \delta\sqrt{k}]\right) \cap \left(V_{\delta,k} \oplus b(o, r)\right) \neq \emptyset.$$

- Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\Omega_{\delta,k}) = 1 \quad \text{für jedes } \delta \in (0, 1). \quad (43)$$

Der Beweis von Theorem 3.15 geht über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus. Er kann beispielsweise im Buch von Meester und Roy (1996), Corollary 4.1 nachgelesen werden.

### 3.5.2 Theorem vom Slivnyak-Typ

In dem folgenden Theorem vom Slivnyak-Typ wird die (Palmsche) Wahrscheinlichkeit einer Perkolationseigenschaft (des ‚typischen‘, d.h. zufällig herausgegriffenen Eckpunktes) des Graphen  $G = (V, E)$  durch einen Erwartungswert ausgedrückt.

- Für jedes  $n \geq 1$  sei  $C_n = \{S_m : S_n \sim S_m\}$  der (zufällige) Site-Cluster von Poisson-Punkten, der den Punkt  $S_n$  enthält.
- Außerdem sei

$$N_r([0, 1]^2) = \#\{S_n \in [0, 1]^2 : |C_n| = \infty\}$$

die Anzahl der Poisson-Punkte im Einheitsquadrat  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ , die zu einem unendlichen Site-Cluster gehören.

**Theorem 3.16** *Es gilt*

$$\theta(r) = \mathbb{E} N_r([0, 1]^2) \quad \text{für jedes } r > 0. \quad (44)$$

**Beweis**

- Für  $k \geq 1$  sei  $Q_1^{(k)}, \dots, Q_{k^2}^{(k)} \subset [0, 1]^2$  eine Zerlegung des Einheitsquadrates  $[0, 1]^2$  in  $k^2$  gleichgroße Quadrate mit der Seitenlänge  $1/k$ .
- Für  $i = 1, \dots, k^2$  sei

$$X_i^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \#\{S_n \in Q_i^{(k)} : |C_n| = \infty\} = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Indikatorfunktion des Ereignisses  $\{\#\{S_n \in Q_i^{(k)} : |C_n| = \infty\} = 1\}$ , dass genau ein Poisson-Punkt in  $Q_i^{(k)}$  zu einem unendlichen Site-Cluster gehört.

- Außerdem sei  $X_k = \sum_{i=1}^{k^2} X_i^{(k)}$ . Dann kann man sich leicht überlegen, dass

$$X_k \leq X_{k+1} \quad \text{für jedes } k \geq 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = N_r([0, 1]^2).$$

- Aus dem Satz über die monotone Konvergenz ergibt sich also, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_k = \mathbb{E} N_r([0, 1]^2). \quad (45)$$

- Sei nun  $A_i = \{\#\{S_n \in Q_i^{(k)} : |C_n| = \infty\} \geq 1\}$  das Ereignis, dass es mindestens einen Poisson-Punkt in  $Q_i^{(k)}$  gibt, der zu einem unendlichen Site-Cluster gehört.
- Dann gilt für jedes  $i = 1, \dots, k^2$ , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_i^{(k)} &= P(X_i^{(k)} = 1) \\ &= P(A_i \mid \#\{S_n : S_n \in Q_i^{(k)}\} = 1) P(\#\{S_n : S_n \in Q_i^{(k)}\} = 1) \\ &= \theta_k(r) \left( \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \end{aligned}$$

für  $k \rightarrow \infty$ , wobei  $\theta_k(r) = P(A_i \mid \#\{S_n : S_n \in Q_i^{(k)}\} = 1)$ .

- Hieraus ergibt sich, dass für beliebige  $k \geq 1$  und  $i = 1, \dots, k^2$

$$\mathbb{E} X_k = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{k^2} X_i^{(k)} = k^2 \mathbb{E} X_i^{(k)} = \theta_k(r) (1 + o(1)). \quad (46)$$

- Außerdem ergibt sich aus der (axiomatischen) Unabhängigkeitseigenschaft von homogenen Poisson-Prozessen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k(r) = \theta(r).$$

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (45) und (46) die Gültigkeit von (44).  $\square$

### 3.5.3 $\alpha$ -Konnektivität

- Sei nun  $\alpha \in (0, 1)$  und  $r_\alpha = \inf\{r : \theta(r) > \alpha\}$ , wobei  $r_\alpha$  der  $\alpha$ -kritische Konnektivitätsradius genannt wird.

– Dann gilt offenbar, dass

$$r_c \leq r_\alpha \quad \text{für jedes } \alpha \in (0, 1). \quad (47)$$

– Darüber hinaus ergibt sich so wie im Beweis von Theorem 3.10, dass

$$0 < r_c < r_\alpha < \infty \quad \text{für jedes } \alpha \in (0, 1).$$

- Für jedes  $k \geq 1$  betrachten wir die Einschränkung  $V_k = \{S_n : S_n \in [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2\}$  des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  auf das Quadrat  $[-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2$ .

- Außerdem betrachten wir das (entsprechend eingeschränkte) Kantensystem  $E_k \subset V_k \times V_k$ , wobei

$$E_k = \{(v, v') \in V_k \times V_k : 0 < |v - v'| \leq r\}.$$

- Der zufällige Graph  $G_k(r) = (V_k, E_k)$  heißt  $\alpha$ -zusammenhängend, wenn  $G_k(r)$  einen Site-Cluster besitzt, der aus mindestens  $\alpha k$  Eckpunkten besteht.
- Außerdem sagen wir, dass  $G_k(r)$  *asymptotisch fast sicher (a.a.s.)*  $\alpha$ -zusammenhängend ist, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(G_k(r) \text{ ist } \alpha\text{-zusammenhängend}) = 1. \quad (48)$$

Wir zeigen nun, wie sich die Theoreme 3.15 und 3.16 anwenden lassen, um nachzuweisen, dass die Gültigkeit von (48) eng mit dem  $\alpha$ -kritischen Konnektivitätsradius  $r_\alpha = \inf\{r : \theta(r) > \alpha\}$  zusammenhängt.

**Theorem 3.17** *Sei  $\alpha \in (0, 1)$ .*

- *Wenn  $r > r_\alpha$ , dann ist  $G_k(r)$  a.a.s.  $\alpha$ -zusammenhängend.*
- *Wenn  $r < r_\alpha$ , dann ist  $G_k(r)$  nicht a.a.s.  $\alpha$ -zusammenhängend.*

**Beweis**

- Sei  $r > r_\alpha$ . Um die Gültigkeit von (48) zu zeigen, nutzen wir die Tatsache, dass

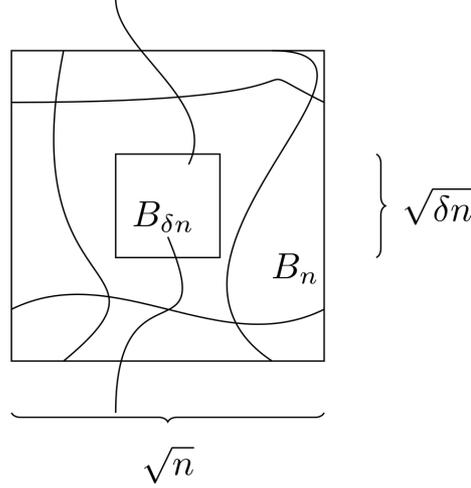
$$\{G_k(r) \text{ ist } \alpha\text{-zusammenhängend}\} \supset \Omega_{\delta,k}^{(1)} \cap \Omega_{\delta,k}^{(2)}, \quad (49)$$

wobei

- $\Omega_{\delta,k}^{(1)}$  das Ereignis bezeichnet, dass in dem (kleineren) Quadrat

$$B_{\delta,k} = [-\sqrt{\delta k}/2, \sqrt{\delta k}/2]^2$$

mit  $\delta \in (0, 1)$  mindestens  $\alpha k$  Punkte eines unendlichen Site-Clusters des (nicht eingeschränkten) Graphen  $G_\infty(r)$  liegen,

Abbildung 26: Hinreichende Bedingung für a.a.s.  $\alpha$ -Konnektivität

– und  $\Omega_{\delta,k}^{(2)}$  das Ereignis bezeichnet, dass der (eingeschränkte) Graph  $G_k(r)$  in der Menge  $B_{1,k} \setminus B_{\delta,k}$  einen zusammenhängenden Ring besitzt, vgl. Abbildung 26.

- Wegen (49) gilt

$$\begin{aligned}
 P(G_k(r) \text{ ist } \alpha\text{-zusammenhängend}) &\geq P(\Omega_{\delta,k}^{(1)} \cap \Omega_{\delta,k}^{(2)}) \\
 &= 1 - P(\{\Omega_{\delta,k}^{(1)}\}^c \cup \{\Omega_{\delta,k}^{(2)}\}^c) \\
 &\geq 1 - P(\{\Omega_{\delta,k}^{(1)}\}^c) - P(\{\Omega_{\delta,k}^{(2)}\}^c) \\
 &= P(\Omega_{\delta,k}^{(1)}) + P(\{\Omega_{\delta,k}^{(2)}\}) - 1.
 \end{aligned}$$

- Es genügt also zu zeigen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\Omega_{\delta,k}^{(i)}) = 1 \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (50)$$

- Wir zeigen zunächst, dass (50) für  $i = 2$  gilt, d.h., dass es mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit einen zusammenhängenden Ring in  $B_{1,k} \setminus B_{\delta,k}$  gibt, wenn  $k \geq 1$  hinreichend groß ist.

– Wegen Theorem 3.15 gibt es in dem Rechteck

$$R_{(1-\sqrt{\delta})/2,k} = [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2] \times [-\sqrt{k}/2, -\sqrt{\delta k}/2]$$

mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit einen Site-Cluster, der von links nach rechts verläuft, wenn  $k \geq 1$  hinreichend groß ist.

- Weil die Differenz-Menge  $B_{1,k} \setminus B_{\delta,k}$  als Vereinigung von 4 solchen Rechtecken dargestellt werden kann, vgl. Abbildung 27, ergibt sich hieraus die Gültigkeit von (50) für  $i = 2$ ,



– Allerdings muss dann gezeigt werden, dass (vgl. Übungsaufgabe 2.4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(\delta k)^2} \text{Var} N_r(B_{\delta,k}) = 0.$$

- Alternativ ergibt sich die (stochastische) Nullkonvergenz in (51) aus der Tatsache, dass sogar die entsprechende fast sichere Nullkonvergenz gilt.
- Denn der homogene Poisson-Prozess  $\{S_n\}$  ist ein ergodisches dynamisches System bezüglich der Euklidischen Translationsgruppe des  $\mathbb{R}^2$  ist, vgl. Korollar 3.3.
- Deshalb gilt mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_r(B_{\delta,k})}{\delta k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta k} \int_{B_{\delta,k}} N_r([0, 1]^2 + x) dx = \mathbb{E} N_r([0, 1]^2). \quad (52)$$

- Damit ist die erste Teilaussage von Theorem 3.17 bewiesen.
- Um die Gültigkeit der zweiten Teilaussage zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass  $r \leq r_c$ .
  - Man kann zeigen, dass dann  $\theta(r) = 0$  nicht nur für  $r < r_c$ , sondern auch für  $r = r_c$  gilt.
  - Hieraus und aus Theorem 3.16 ergibt sich, dass der  $r$ -Graph  $G = G(X, r)$ , der durch den homogenen Poisson-Prozess  $X = \{S_n\}$  erzeugt wird, mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endliche Cluster besitzt.
  - Dies impliziert, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(G_k(r) \text{ ist } \alpha\text{-zusammenhängend}) = 0$ , d.h.,  $G_k(r)$  ist nicht a.a.s.  $\alpha$ -zusammenhängend.

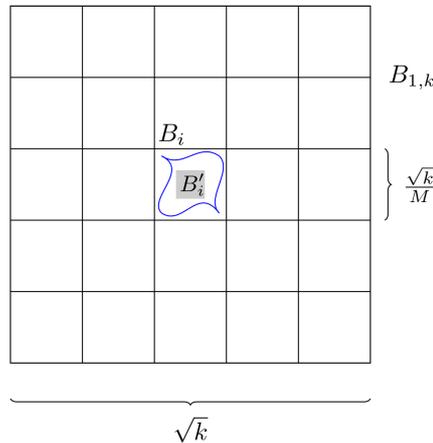


Abbildung 28: Zerlegung des Quadrates  $B_{1,k}$

- Sei nun  $r_c < r < r_\alpha$ .
  - Um die zweite Teilaussage für diesen Fall zu beweisen, zeigen wir, dass a.a.s die größte Zusammenhangskomponente von  $G_k(r)$  aus weniger als  $\alpha k$  Eckpunkten besteht.

– Dies impliziert erneut, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(G_k(r) \text{ ist } \alpha\text{-zusammenhängend}) = 0$ .

- Hierfür zerlegen wir das Quadrat  $B_{1,k} = [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2$  in  $M^2$  kongruente Quadrate  $B_1, \dots, B_{M^2}$  mit der Seitenlänge  $\sqrt{k}/M$  für ein festes  $M > \sqrt{4/\alpha}$ , vgl. Abbildung 28. Dann gilt

$$\nu_2(B_i) = \frac{k}{M^2} < \frac{k\alpha}{4} \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, M^2. \quad (53)$$

– Sei weiter  $\delta \in (1 - \alpha/4, 1)$  und bezeichne  $B'_i$  das Quadrat mit der Fläche  $\delta\nu_2(B_i) < \delta k\alpha/4$ , welches konzentrisch zu  $B_i$  liegt.

– Schließlich sei  $R_i$  der Ring  $R_i = B_i \setminus B'_i$ . Dann gilt

$$\frac{\nu_2(B'_i)}{\nu_2(B_i)} = \delta > 1 - \frac{\alpha}{4} \quad \text{und somit} \quad \frac{\nu_2(R_i)}{\nu_2(B_i)} < \frac{\alpha}{4}. \quad (54)$$

- Wir zeigen, dass die Wahrscheinlichkeiten der folgenden vier Ereignisse  $A_k^{(1)}, \dots, A_k^{(4)}$  beliebig groß werden, wenn  $k \rightarrow \infty$ , d.h., die Ereignisse  $A_k^{(1)}, \dots, A_k^{(4)}$  sind a.a.s für  $k \rightarrow \infty$ :

1.  $A_k^{(1)} = \{X(B_i) < \alpha k/4 \text{ für jedes } i = 1, \dots, M^2\}$ , wobei  $X(B) = \#\{n : S_n \in B\}$ ,
2.  $A_k^{(2)} = \left\{X\left(\bigcup_{i=1}^{M^2} R_i\right) < \alpha k/4\right\}$ ,
3.  $A_k^{(3)} = \{N_r(B_{1,k}) < \alpha k\}$ , wobei  $N_r(B) = \#\{S_n \in B : |C_n| = \infty\}$ ,
4.  $A_k^{(4)} = \left\{\text{Für jedes } i = 1, \dots, M^2 \text{ enthält der Ring } R_i \text{ einen geschlossenen Zyklus, der in einer unendlichen Zusammenhangskomponente des } r\text{-Graphen } G = G(X, r) \text{ enthalten ist, der durch den homogenen Poisson-Prozess } X = \{S_n\} \text{ mit der Intensität } \lambda = 1 \text{ erzeugt wird.}\right\}$

- Zu 1) Aus den Unabhängigkeitseigenschaften des Poisson-Prozesses  $X = \{S_n\}$  ergibt sich mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (unter der Annahme  $\lambda = 1$ ), dass

- $X(B_i)/\nu_2(B_i) \rightarrow 1$  in Wahrscheinlichkeit für jedes  $i = 1, \dots, M^2$ , wenn  $k \rightarrow \infty$ .
- Weil  $\nu_2(B_i) < k\alpha/4$  gilt (vgl. (53)), ergibt sich hieraus für  $k \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} P(A_k^{(1)}) &= P\left(X(B_i) < \frac{\alpha k}{4} \text{ für jedes } i = 1, \dots, M^2\right) \\ &\geq P\left(\frac{X(B_i)}{\nu_2(B_i)} \leq 1 \text{ für jedes } i = 1, \dots, M^2\right) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

- Zu 2) Auf die gleiche Weise wie in 1) ergibt sich, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_k^{(2)}) = 1$ , weil

$$\nu_2\left(\bigcup_{i=1}^{M^2} R_i\right) = \sum_{i=1}^{M^2} \nu_2(R_i) \stackrel{(54)}{<} \frac{M^2 \nu_2(B_1) \alpha}{4} = \frac{\alpha k}{4},$$

wobei in der letzten Gleichheit genutzt wurde, dass  $\nu_2(B_1) = k/M^2$ .

- Zu 3)

– Man kann zeigen, dass die Funktion  $\theta(r)$  streng monoton wachsend ist für  $r \in (r_c, r_\alpha)$ .

- Aus Theorem 3.16 ergibt sich somit, dass

$$\alpha > \theta(r) = \mathbb{E} N_r([0, 1]^2) \quad \text{für } r \in (r_c, r_\alpha). \quad (55)$$

- Hieraus und aus dem Gesetz der großen Zahlen in (52) ergibt sich ähnlich wie in den ersten zwei Fällen, dass für  $k \rightarrow \infty$

$$P(A_k^{(3)}) = \mathbb{P}(N_r(B_{1,k}) < \alpha k) \stackrel{(55)}{\geq} P\left(\frac{N_r(B_{1,k})}{k} \leq \mathbb{E} N_r([0, 1]^2)\right) \stackrel{(52)}{\rightarrow} 1.$$

- Zu 4) Ähnlich wie im ersten Teil des Beweises lässt sich mit Hilfe von Theorem 3.15 zeigen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k^{(4)}) = 1.$$

- Außerdem lässt sich leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} &\{\text{Jede Zusammenhangskomponente von } G_k(r) \text{ besteht aus weniger als } \alpha k \text{ Eckpunkten}\} \\ &\supset A_k^{(1)} \cap \dots \cap A_k^{(4)}. \end{aligned} \quad (56)$$

- Um (56) zu beweisen, genügt es, die folgenden zwei Fälle zu unterscheiden.
  - Sei  $C \subset G_k(r)$  eine Zusammenhangskomponente, die Eckpunkte in zwei verschiedenen Quadraten  $B'_i$  und  $B'_j$  mit  $i \neq j$  besitzt.
  - Für jedes hinreichend große  $k > 0$  gehören dann auch Eckpunkte zu  $C$ , die in dem Ring  $R_i$  liegen und (unter der Annahme, dass das Ereignis  $A_k^{(4)}$  eintritt) zu einer unendlichen Zusammenhangskomponente des  $r$ -Graphen  $G = G(X, r)$  gehören.
  - Bei gleichzeitigem Vorliegen des Ereignisses  $A_k^{(3)}$  impliziert dies, dass  $|C| < \alpha k$ .
  - Wenn es umgekehrt ein  $i \in \{1, \dots, M^2\}$  gibt, so dass  $C$  nur Eckpunkte in der Menge  $B_i \cup \bigcup_{j=1}^{M^2} R_j$  besitzt, dann ergibt sich bei Vorliegen des Ereignisses  $A_k^{(1)} \cap A_k^{(2)}$ , dass  $|C| < \alpha k/4 + \alpha k/4 < \alpha k$ .
- Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k^{(1)} \cap \dots \cap A_k^{(4)}) = 1$  ergibt sich nun mit Hilfe von (56), dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\text{Jede Zus.-hangskomponente von } G_k(r) \text{ besteht aus } < \alpha k \text{ Eckpunkten}) = 1.$$

- Damit ist Theorem 3.17 vollständig bewiesen.  $\square$

### 3.5.4 Vollständige Konnektivität

- Wir betrachten die in Abschnitt 3.5.3 eingeführte Einschränkung  $G_k(r) = (V_k, E_k)$  des  $r$ -Graphen  $G = G(X, r)$  auf das Quadrat  $B_k = [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2$ .
- Anstelle der in Abschnitt 3.5.3 diskutierten  $\alpha$ -Konnektivität von  $G_k(r)$  für einen vorgegebenen Konnektivitätsradius untersuchen wir nun den folgenden Begriff der (vollständigen) Konnektivität von  $G_k(r_k)$  für eine Folge  $\{r_k\}$  von Konnektivitätsradien mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ .

**Definition** Der Graph  $G_k(r_k)$  heißt *asymptotisch fast sicher (a.a.s.) zusammenhängend*, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(G_k(r_k) \text{ ist zusammenhängend}) = 1, \quad (57)$$

bzw. *a.a.s. nicht zusammenhängend*, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(G_k(r_k) \text{ ist nicht zusammenhängend}) = 1. \quad (58)$$

**Theorem 3.18** Sei  $\alpha \in (0, \infty)$  und für jedes  $k = 1, 2, \dots$  sei der Konnektivitätsradius  $r_k$  gegeben durch

$$r_k = \sqrt{\pi^{-1} \alpha \log k}. \quad (59)$$

- Wenn  $\alpha > 5\pi$ , dann ist  $G_k(r_k)$  a.a.s. zusammenhängend.
- Wenn  $\alpha < 1/3$ , dann ist  $G_k(r_k)$  a.a.s. nicht zusammenhängend.

**Beweis**

- Wir zeigen zunächst die zweite Teilaussage.
  - Sei also  $\alpha < 1/3$  und für jedes  $x \in \mathbb{R}^2$  sei

$$A_k(x) = \{\#\{n : |x - S_n| \leq r_k\} \geq 1\} \cap \{\#\{n : r_k < |x - S_n| \leq 2r_k\} = 0\}. \quad (60)$$

- Dann ergibt sich aus (59) und aus den Unabhängigkeits- bzw. Verteilungseigenschaften des homogenen Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$ , dass für jedes  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}(A_k(x)) = (1 - \exp(-\pi r_k^2)) \exp(-3\pi r_k^2) \stackrel{(59)}{=} \left(\frac{1}{k}\right)^{3\alpha} \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^\alpha\right). \quad (61)$$

- Außerdem kann man leicht zeigen, dass man für jedes  $k \geq 1$ 
  - mindestens  $\beta k / \log k$  sich nicht überlappende Kreise  $B(x_{k,1}, r_k), B(x_{k,2}, r_k), \dots$  mit den Mittelpunkten  $x_{k,1}, x_{k,2}, \dots \in \mathbb{R}^2$  und dem Radius  $2r_k > 0$  in das Quadrat  $B_k = [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2$  „packen“ kann, wobei  $\beta > 0$  eine Konstante ist (die nicht von  $k$  abhängt).
  - Wenn das in (60) eingeführte Ereignis  $A_k(x)$  für mindestens einen dieser Kreise eintritt, dann ist  $G_k(r_k)$  nicht zusammenhängend.
  - Hieraus und aus (61) ergibt sich mit Hilfe der elementaren Ungleichung

$$1 - t \leq \exp(-t) \quad \text{für jedes } t \in [0, 1], \quad (62)$$

dass

$$\begin{aligned} P(G_k(r_k) \text{ ist nicht zusammenhängend}) &\geq 1 - (1 - P(A_k(o)))^{\beta k / \log k} \\ &\stackrel{(62)}{\geq} 1 - \exp\left(-\frac{\beta k}{\log k} P(A_k(o))\right) \\ &\stackrel{(61)}{=} 1 - \exp\left(-\frac{\beta k}{k^{3\alpha} \log k} \left(1 - \left(\frac{1}{k}\right)^\alpha\right)\right). \end{aligned}$$

- Weil  $\alpha < 1/3$  und somit der Exponent des letzten Ausdruckes gegen Null konvergiert, ergibt sich insgesamt, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(G_k(r_k) \text{ ist nicht zusammenhängend}) = 1$ .
- Sei nun  $\alpha > 5\pi$ , und für jedes  $k \geq 1$  sei  $\varepsilon_k > 0$  die kleinste positive Zahl, so dass
  - der Ausdruck  $k/(\log k - \varepsilon_k)$  ganzzahlig ist und
  - sich das Quadrat  $B_k = [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2$  in  $k/(\log k - \varepsilon_k)$  gleichgroße Teilquadrate  $B_{k,1}, B_{k,2}, \dots$  mit Flächeninhalt  $\log k - \varepsilon_k$  zerlegen lässt.
  - Dabei nennen wir ein solches Teilquadrat  $B_{k,i}$  „gefüllt“, wenn  $B_{k,i}$  mindestens einen Punkt des Poisson-Prozesse  $\{S_n\}$  enthält, und „leer“, wenn  $B_{k,i}$  keinen Punkt des Poisson-Prozesse  $\{S_n\}$  enthält.
- Dann gilt  $P(B_{k,i} \text{ ist leer}) = \exp(-\log k + \varepsilon_k)$  für jedes  $k \geq 1$  und somit für  $k \rightarrow \infty$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k/(-\log k + \varepsilon_k)} B_{k,i} \text{ ist gefüllt}\right) = \left(1 - \exp(\log k - \varepsilon_k)\right)^{k/(\log k - \varepsilon_k)} \rightarrow 1, \quad (63)$$

weil man sich leicht überlegen kann, dass  $\varepsilon_k = o(1)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

- Es ist klar, dass Maximalabstand zwischen zwei Punkten in benachbarten Quadraten  $B_{k,i}, B_{k,j}$  mit der Länge der größeren Diagonalen des Rechteckes  $B_{k,i} \cup B_{k,j}$  übereinstimmt, also gleich  $\sqrt{5 \log k - 5\varepsilon_k}$  ist.
  - Wenn  $r_k > \sqrt{5 \log k - 5\varepsilon_k}$  bzw. (äquivalent hierzu)

$$\pi r_k^2 > 5\pi (\log k - \varepsilon_k), \quad (64)$$

dann ist also jeder Poisson-Punkt in  $B_{k,i}$  mit sämtlichen Poisson-Punkten in  $B_{k,i}$  und darüber hinaus mit sämtlichen Poisson-Punkten in den benachbarten Quadraten von  $B_{k,i}$  verbunden.

- Weil wir vorausgesetzt hatten, dass  $\pi r_k^2 = \alpha \log k$  und  $\alpha > 5\pi/4$ , ist die Bedingung (64) für jedes hinreichend große  $k$  erfüllt.
- Hieraus und aus (63) ergibt sich, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(G_k(r_k) \text{ ist zusammenhängend}) = 1$ .  $\square$

### Beachte

- Die in Theorem 3.18 hergeleiteten Wachstumsraten von  $\alpha > 5\pi/4$  bzw.  $\alpha < 1/8$  des Konnektivitätsradius  $r_k$ , die für große  $k \geq 1$  vollständige Konnektivität bzw. das Nichtvorhandensein vollständiger Konnektivität mit hoher Wahrscheinlichkeit gewährleisten, liegen relativ weit auseinander.
- In Abschnitt 3.5.6 zeigen wir, dass  $\alpha = 1/4$  die kritische Wachstumsrate des Konnektivitätsradius ist, bei der für große  $k \geq 1$  vollständige Konnektivität in das Nichtvorhandensein vollständiger Konnektivität (jeweils mit hoher Wahrscheinlichkeit) umschlägt.
- Dabei benötigen wir eine so genannte *Chen–Stein–Schranke* zur Approximation der Verteilung von Zufallsvariablen mit nichtnegativen ganzzahligen Werten durch geeignet gewählte Poisson-Verteilungen, die wir zunächst in Abschnitt 3.5.5 herleiten.

### 3.5.5 Chen–Stein–Schranke

- In diesem Abschnitt betrachten wir Familien von Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  mit Werten in  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  und diskutieren eine Methode zur Approximation ihrer Verteilung  $P_X$  durch eine geeignet gewählte Poisson–Verteilung  $\text{Poi}_\lambda$  (mit dem gleichen Erwartungswert  $\lambda = \mathbb{E} X$ ).
- Dabei leiten wir eine obere Schranke für den Variationsabstand  $d_{\text{TV}}(P_X, \text{Poi}_\lambda)$  der beiden Verteilungen her, die vom Chen–Stein–Typ ist.

Zunächst führen wir den Begriff des Variationsabstandes für  $\mathbb{Z}_+$ –wertige Zufallsvariablen ein und leiten eine äquivalente Darstellungsformel her.

**Definition** Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  zwei beliebige Zufallsvariablen. Dann heißt

$$d_{\text{TV}}(P_X, P_Y) = \sup_{B \subset \mathbb{Z}_+} |P(X \in B) - P(Y \in B)| \quad (65)$$

der *Variationsabstand* von  $P_X$  und  $P_Y$ .

Wir zeigen, dass sich der Variationsabstand  $d_{\text{TV}}(P_X, P_Y)$  für beliebige Zufallsvariablen  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  durch Erwartungswerte ausdrücken lässt.

#### Lemma 3.2

- Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  beliebige Zufallsvariablen, und sei  $h : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion mit

$$\|h\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |h(k)| < \infty.$$

- Dann gilt

$$d_{\text{TV}}(P_X, P_Y) = \frac{1}{2} \sup_{h: \|h\|=1} |\mathbb{E} h(X) - \mathbb{E} h(Y)|. \quad (66)$$

#### Beweis

- Für jedes  $B \subset \mathbb{Z}_+$  gilt

$$\begin{aligned} P(X \in B) - P(Y \in B) &\leq |P(X \in B) - P(Y \in B)| \\ &\leq \max\{P(X \in B) - P(Y \in B), P(X \in B^c) - P(Y \in B^c)\}, \end{aligned}$$

wobei  $B^c = \mathbb{Z}_+ \setminus B$  das Komplement von  $B$  bezeichnet.

- Hieraus und aus der Definitionsgleichung (65) des Variationsabstandes  $d_{\text{TV}}(P_X, P_Y)$  ergibt sich, dass

$$d_{\text{TV}}(P_X, P_Y) = \sup_{B \subset \mathbb{Z}_+} (P(X \in B) - P(Y \in B)). \quad (67)$$

- Außerdem gilt offenbar für jedes  $B \subset \mathbb{Z}_+$ , dass

$$P(X \in B) - P(Y \in B) \leq P(X \in B_{\geq}) - P(Y \in B_{\geq}), \quad (68)$$

wobei  $B_{\geq} = \{k \in \mathbb{Z}_+ : P(X = k) \geq P(Y = k)\}$ .

- Somit ergibt sich, dass für jedes  $B \subset \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |P(X = k) - P(Y = k)| \\ &= \sum_{k \in B_{\geq}} (P(X = k) - P(Y = k)) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+ \setminus B_{\geq}} (P(Y = k) - P(X = k)) \\ &= P(X \in B_{\geq}) - P(Y \in B_{\geq}) + P(Y \notin B_{\geq}) - P(X \notin B_{\geq}) \\ &= 2(P(X \in B_{\geq}) - P(Y \in B_{\geq})) \\ &\stackrel{(68)}{\geq} 2(P(X \in B) - P(Y \in B)). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (67) ergibt sich, dass

$$d_{\text{TV}}(P_X, P_Y) \leq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |P(X = k) - P(Y = k)|. \quad (69)$$

- Andererseits gilt für jede Funktion  $h : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|h\| = 1$ , dass

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} h(X) - \mathbb{E} h(Y)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h(k)P(X = k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} h(k)P(Y = k) \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |h(k)| |P(X = k) - P(Y = k)| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |P(X = k) - P(Y = k)|. \end{aligned}$$

- Dabei gilt insbesondere  $|\mathbb{E} h(X) - \mathbb{E} h(Y)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |P(X = k) - P(Y = k)|$ , wenn  $h(k) = 1$  für jedes  $k \in B_{\geq}$  und  $h(k) = -1$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}_+ \setminus B_{\geq}$ .
- Hieraus und aus (69) ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Der Ausgangspunkt bei der Herleitung von Chen–Stein–Schranken zur Approximation der Verteilung  $P_X$  von  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  durch eine geeignet gewählte Poisson–Verteilung  $\text{Poi}_\lambda$  ist das folgende Resultat.

**Theorem 3.19** *Die Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  mit Werten in  $\mathbb{Z}_+$  ist genau dann  $\text{Poi}_\lambda$ -verteilt für ein  $\lambda \in (0, \infty)$ , wenn*

$$\lambda \mathbb{E} g(X + 1) - \mathbb{E} (X g(X)) = 0 \quad \text{für jede beschränkte Funktion } g : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}. \quad (70)$$

**Beweis**

- Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  eine  $\text{Poi}_\lambda$ -verteilte Zufallsvariable.
- Für jede beschränkte Funktion  $g : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann

$$\mathbb{E}(\lambda g(X+1)) = \sum_{j \geq 0} \lambda g(j+1) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$

und

$$\mathbb{E}(Xg(X)) = \sum_{j \geq 1} j g(j) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \sum_{j \geq 0} \lambda g(j+1) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}.$$

- Damit ist die Gültigkeit von (70) bewiesen.
- Es gelte nun (70) für jede beschränkte Funktion  $g : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Damit gilt (70) insbesondere auch für die Funktion  $g_s : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $g_s(n) = s^n$  für ein beliebiges  $s \in [-1, 1]$ , d.h., es gilt

$$0 = \lambda \mathbb{E} s^{X+1} - \mathbb{E}(X s^X) = \lambda s f(s) - s f'(s)$$

für jedes  $s \in [-1, 1]$ , wobei  $f(s) = \sum_{k \geq 0} P(X = k) s^k$  die monenterzeugende Funktion von  $X$  und  $f'(s)$  ihre Ableitung bezeichnet.

- Die Funktion  $f(s)$  ist also Lösung der Differenzialgleichung  $f'(s) = \lambda f(s)$  mit Randwert  $f(1) = 1$ , d.h.,  $f(s) = \exp(\lambda(s-1))$ .
- Dies gilt genau dann, wenn  $P_X = \text{Poi}_\lambda$ . □

**Beachte**

- Die Chen–Stein–Methode zur Poisson–Approximation basiert auf der Idee, dass für jede näherungsweise  $\text{Poi}_\lambda$ -verteilte Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  mit Werten in  $\mathbb{Z}_+$  und für jede beschränkte Funktion  $g : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  die Differenz  $\lambda \mathbb{E} g(X+1) - \mathbb{E}(Xg(X))$  in (70) einen Wert nahe bei Null haben sollte.
- Um diese Idee zu präzisieren, nutzen wir die Tatsache, dass sich jede beschränkte Funktion  $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  in der Form  $\lambda g_{\lambda,f}(j+1) - j g_{\lambda,f}(j)$  für  $j \geq 0$  darstellen lässt, wobei  $g_{\lambda,f}(0) = 0$  und

$$g_{\lambda,f}(j+1) = \frac{j!}{\lambda^{j+1}} \sum_{k=0}^j \text{Poi}_\lambda(\{k\}) e^\lambda f(k) \quad \text{für } j \geq 0.$$

- Denn hieraus ergibt sich, dass

$$g_{\lambda,f}(1) = \frac{f(0)}{\lambda} = \frac{f(0)}{\lambda} e^\lambda \text{Poi}_\lambda(\{0\}) \quad \text{bzw.} \quad f(0) = \lambda g(1) - 0g(0)$$

und durch wiederholtes Einsetzen

$$\begin{aligned} & \lambda g_{\lambda, f}(j+1) - j g_{\lambda, f}(j) \\ &= \lambda \frac{j!}{\lambda^{j+1}} \sum_{k=0}^j \text{Poi}_{\lambda}(\{k\}) e^{\lambda} f(k) - j \frac{(j-1)!}{\lambda^j} \sum_{k=0}^{j-1} \text{Poi}_{\lambda}(\{k\}) e^{\lambda} f(k) \\ &= \frac{j!}{\lambda^j} \text{Poi}_{\lambda}(\{j\}) e^{\lambda} f(j) \\ &= f(j). \end{aligned}$$

- Für  $B \subset \mathbb{Z}_+$  betrachten wir insbesondere die Funktion  $f_B : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_B(j) = \mathbb{1}_B(j) - \text{Poi}_{\lambda}(B)$ , wobei  $\text{Poi}_{\lambda}(B) = \sum_{i \in B} (e^{-\lambda} \lambda^i / i!)$ .
- Dann untersuchen wir die Lösung  $g_{\lambda, f_B}$  der so genannten *Stein-Gleichung*

$$\lambda g_{\lambda, f_B}(j+1) - j g_{\lambda, f_B}(j) = \mathbb{1}_B(j) - \text{Poi}_{\lambda}(B) \quad \text{für jedes } j \geq 0,$$

die gegeben ist durch  $g_{\lambda, f_B}(0) = 0$  und

$$\begin{aligned} g_{\lambda, f_B}(j+1) &= \frac{j! e^{\lambda}}{\lambda^{j+1}} (\text{Poi}_{\lambda}(B \cap U_j) - \text{Poi}_{\lambda}(B) \text{Poi}_{\lambda}(U_j)) \\ &= \frac{j! e^{\lambda}}{\lambda^{j+1}} (\text{Poi}_{\lambda}(B \cap U_j) \text{Poi}_{\lambda}(U_j^c) - \text{Poi}_{\lambda}(B \cap U_j^c) \text{Poi}_{\lambda}(U_j)), \end{aligned}$$

wobei  $U_j = \{0, 1, \dots, j\}$ .

- Hieraus ergibt sich, dass

$$P(X \in B) - \text{Poi}_{\lambda}(B) = \mathbb{E}(\lambda g_{\lambda, f_B}(X+1) - X g_{\lambda, f_B}(X)). \quad (71)$$

- Um die gleichmäßige Kleinheit der linken Seite der Gleichung (71) in  $B \subset \mathbb{Z}_+$  zu zeigen, schätzen wir die rechte Seite von (71) gleichmäßig in  $B$  ab. Dabei ist die folgende Ungleichung nützlich.

### Lemma 3.3

- Sei  $\lambda > 0$  und  $B \subset \mathbb{Z}_+$ . Die Funktion  $g = g_{\lambda, B} : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $g(0) = 0$  und

$$\lambda g(j+1) - j g(j) = \mathbb{1}_B(j) - \text{Poi}_{\lambda}(B) \quad \text{für jedes } j \geq 0. \quad (72)$$

- Dann gilt

$$\Delta g \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq 1, \quad \text{wobei } \Delta g = \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} |g(j+1) - g(j)|. \quad (73)$$

### Beweis

- Für jedes  $j \geq 0$  sei  $U_j = \{0, 1, \dots, j\}$ . Dann kann man leicht überprüfen, dass die Lösung der Rekursionsgleichung (72) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} g(j+1) &= \frac{j! e^{\lambda}}{\lambda^{j+1}} (\text{Poi}_{\lambda}(B \cap U_j) - \text{Poi}_{\lambda}(B) \text{Poi}_{\lambda}(U_j)) \\ &= \frac{j! e^{\lambda}}{\lambda^{j+1}} (\text{Poi}_{\lambda}(B \cap U_j) \text{Poi}_{\lambda}(U_j^c) - \text{Poi}_{\lambda}(B \cap U_j^c) \text{Poi}_{\lambda}(U_j)). \end{aligned}$$

- Im Fall  $B = \{j\}$  prüft man nun leicht nach, dass die Folge  $g(1), \dots, g(j)$  negativ und absteigend, während die Folge  $g(j+1), g(j+2), \dots$  positiv und absteigend ist.
  - Insbesondere nimmt im Fall  $j > 0$  der Ausdruck  $g(i+1) - g(i)$  nur für  $i = j$  einen positiven Wert an und für diesen Wert gilt

$$\begin{aligned} g(j+1) - g(j) &= e^{-\lambda} \lambda^{-1} \left( \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} + \sum_{r=1}^j \frac{\lambda^r}{r!} \frac{r}{j} \right) \\ &\leq \min\{j^{-1}, \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda})\}, \end{aligned} \quad (74)$$

- während für  $j = 0$  die Differenzen  $g(i+1) - g(i)$  für alle  $i \geq 0$  negativ sind.
- Wegen  $g_{\lambda, B} = \sum_{j \in B} g_{\lambda, \{j\}}$  gilt dann die Abschätzung

$$\sup_{i \geq 0} (g(i+1) - g(i)) \leq \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda})$$

sogar für beliebiges  $B \subset \mathbb{Z}_+$ .

- Die Relation  $g_{\lambda, B} = -g_{\lambda, B^c}$  zeigt nun, dass  $\Delta g \leq \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda})$ . □

### Theorem 3.20

- Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge, die nichtleer und abzählbar ist, und seien  $\{X_i, i \in I\}$ ,  $\{V_i, i \in I\}$  beliebige Familien von Zufallsvariablen  $X_i, V_i : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  ist, so dass
  - $P(X_i \in \{0, 1\}) = 1$  für jedes  $i \in I$
  - und  $\sum_{i \in I} p_i < \infty$ , wobei  $p_i = \mathbb{E} X_i = P(X_i = 1)$ .
  - die Verteilung von  $V_i$  ist gerade die bedingte Verteilung von  $\sum_{j \in I} X_j - 1$  gegeben  $X_i = 1$ .
- Für  $X = \sum_{i \in I} X_i$  gilt dann

$$d_{TV}(P_X, \text{Poi}_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E}|X - V_i|, \quad (75)$$

wobei  $\lambda = \sum_{i \in I} p_i$ .

### Beweis

- Für  $B \subset \mathbb{Z}^+$  sei  $g = g_{\lambda, B}$  die in (72) gegebene Funktion. Dann ergibt sich aus (72), dass
 
$$P(X \in B) - \text{Poi}_\lambda(B) = \mathbb{E}(\lambda g(X+1) - Xg(X)).$$
- Zusammen mit den Identitäten  $\lambda = \sum_{i \in I} p_i$  und  $X = \sum_{i \in I} X_i$  erhalten wir hieraus die Beziehung

$$\begin{aligned} P(X \in B) - \text{Poi}_\lambda(B) &= \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E}g(X+1) - \sum_{i \in I} \mathbb{E}(g(X) \mathbb{1}_{\{X_i=1\}}) \\ &= \sum_{i \in I} p_i \left( \mathbb{E}g(X+1) - \mathbb{E}(g(X) | X_i = 1) \right) \end{aligned}$$

- Für beliebige  $a, b \in \mathbb{Z}_+$  mit  $a \leq b$  gilt

$$\begin{aligned} |g(b) - g(a)| &= \left| \sum_{i=a}^{b-1} g(i+1) - g(i) \right| \\ &\leq (b-a)\Delta g \end{aligned}$$

- Nach Lemma 3.3 gilt somit

$$\begin{aligned} |P(X \in B) - \text{Poi}_\lambda(B)| &= \left| \sum_{i \in I} p_i (\mathbb{E}g(X+1) - \mathbb{E}(g(X) \mid X_i = 1)) \right| \\ &= \left| \sum_{i \in I} p_i (\mathbb{E}g(X+1) - \mathbb{E}(g(V_i+1))) \right| \\ &\leq \Delta g \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E}|X+1 - (V_i+1)| \\ &\leq \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda}) \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E}|X - V_i|. \end{aligned}$$

- Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

### Definition

- Man sagt, dass die Menge  $I_i \subset I$  eine *Korrelationsumgebung* von  $i \in I$  ist, wenn die Zufallsvariablen  $X_i$  und  $\{X_j, j \in I \setminus I_i\}$  unabhängig sind.
- Außerdem betrachten wir die folgenden beiden Summen  $b_1$  und  $b_2$  von Momenten erster bzw. zweiter Ordnung, wobei

$$b_1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I_i} \mathbb{E} X_i \mathbb{E} X_j \quad \text{und} \quad b_2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} \mathbb{E}(X_i X_j). \quad (76)$$

**Korollar 3.4** Für die Verteilung  $P_X$  der Summe  $X = \sum_{i \in I} X_i$  gilt

$$d_{\text{TV}}(P_X, \text{Poi}_\lambda) \leq \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda})(b_1 + b_2), \quad \text{wobei } \lambda = \sum_{i \in I} p_i. \quad (77)$$

### Beweis

- Sei  $(V'_i)_{i \in I}$  eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen, die von  $(X_i)_{i \in I}$  unabhängig ist.
- Für jedes  $i \in I$  sei die Verteilung von  $V'_i$  gleich der bedingten Verteilung von  $\sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} X_j$  gegeben  $X_i = 1$ .
- Eine Anwendung von Theorem 3.20 mit  $V_i = V'_i + \sum_{j \in I \setminus I_i} X_j$  liefert zunächst

$$\begin{aligned} d_{\text{TV}}(P_X, \text{Poi}_\lambda) &\leq \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda}) \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E}|X - V_i| \\ &= \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda}) \sum_{i \in I} p_i \mathbb{E} \left| X_i - V'_i + \sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} X_j \right| \\ &\leq \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda}) \sum_{i \in I} \left( p_i^2 + \sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} p_i \mathbb{E}(X_j \mid X_i = 1) + \sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} p_i p_j \right). \end{aligned}$$

- Mit Hilfe der Identität

$$p_i \mathbb{E}(X_j \mid X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1) \mathbb{E}(X_j \mid X_i = 1) = \mathbb{E}(X_i X_j)$$

folgt nun die Behauptung.  $\square$

### 3.5.6 Kritische Wachstumsrate des Konnektivitätsradius

- Wir betrachten erneut die in Abschnitt 3.5.3 eingeführte Einschränkung  $G_k(r) = (V_k, E_k)$  des  $r$ -Graphen  $G = G(X, r)$  auf das Quadrat  $B_k = [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2$ .
- So wie in Abschnitt 3.5.4 sei  $\{r_k\}$  eine Folge von Konnektivitätsradien mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$  ist, wobei

$$r_k = \sqrt{\pi^{-1} \alpha \log k} \quad \text{für jedes } k = 1, 2, \dots$$

und  $\alpha \in (0, \infty)$  eine gewisse Wachstumsrate ist.

- Wir zeigen nun, in welchem Sinne durch  $\alpha = 1$  eine *kritische Wachstumsrate* gegeben ist.

#### Theorem 3.21

- Sei  $\beta > 0$  und für jedes  $k \geq 1$  sei der Konnektivitätsradius  $r_k > 0$  gegeben durch  $\pi r_k^2 = \log k + \beta$ .
- Für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert dann die Anzahl der isolierten Knoten in  $G_k(r_k)$  in Verteilung gegen eine Poisson-Verteilung  $\text{Poi}_\lambda$  mit Parameter  $\lambda = e^{-\beta}$ .

#### Beweis

- Zur Vereinfachung nehmen wir im folgenden an, dass  $B_k$  der Torus sei, der durch Identifikation der Ränder des Quadrates  $[-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]$  entsteht. Dadurch werden Randeffekte eliminiert.
  - Zunächst führen wir die folgende Diskretisierung ein, wobei wir  $B_k$  in  $m^2$  Quadrate  $B_{k,1}, \dots, B_{k,m^2}$  der Seitenlänge  $\sqrt{k}/m$  und mit Zentren  $s_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i \in \{1, \dots, m^2\}$  zerlegen.
  - Sei  $A_i^{k,m}$  das Ereignis, dass  $B_{k,i}$  genau einen Punkt des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  enthält.
  - Für jedes feste  $k \geq 1$  und jede Folge  $i_1, i_2, \dots$  mit  $i_m \leq m^2$  gilt dann

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P(A_{i_m}^{k,m})}{k/m^2} = 1.$$

- Beachte außerdem, dass für feste  $k, m \geq 1$  die Ereignisse  $A_1^{k,m}, \dots, A_{m^2}^{k,m}$  unabhängig sind.
- Sei  $D_i$  eine Kreisscheibe mit Radius  $2r_k$  und Mittelpunkt  $s_i$ .

- Mit  $C_i^{k,m}$  bezeichnen wir das Ereignis, dass für jedes Quadrat  $B_{k,j}$ , das einen nicht-leeren Schnitt mit  $D_i \setminus B_{k,i}$  hat, gilt, dass  $B_{k,j}$  keinen Punkt des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  enthält.
- Für jedes feste  $k \geq 1$  und jede Folge  $i_1, i_2, \dots$  mit  $i_m \leq m^2$  gilt dann

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P(C_{i_m}^{k,m})}{e^{-\pi r_k^2}} = 1.$$

- Beachte, dass die Ereignisse  $C_i^{k,m}$  und  $C_j^{k,m}$  unabhängig sind, wenn  $|s_i - s_j| \geq 3r_k$ .
- Für jedes  $i \in \{1, \dots, m^2\}$  definieren wir nun die Zufallsvariablen

$$X_i^{k,m} = \mathbb{1}_{A_i^{k,m} \cap C_i^{k,m}}, \quad W_k^m = \sum_{i=1}^{m^2} X_i^{k,m} \quad \text{und} \quad W_k = \lim_{m \rightarrow \infty} W_k^m.$$

- Beachte, dass  $W_k$  die (zufällige) Anzahl der isolierten Knoten in  $B_k$  ist.
- Außerdem definieren wir für jedes  $i \in I = \{1, \dots, m^2\}$  die Korrelationsumgebung

$$I_i = \{j \in I : |s_i - s_j| \leq 3r_k\}.$$

- Beachte, dass dann  $X_i^{k,m}$  unabhängig von  $X_j^{k,m}$  ist für jedes  $j \in I \setminus I_i$ .
- Mit der abkürzenden Schreibweise  $X_i = X_i^{k,m}$  definieren wir sodann

$$b_1 = \sum_{i=1}^{m^2} \sum_{j \in I_i} \mathbb{E}X_i \mathbb{E}X_j \quad \text{und} \quad b_2 = \sum_{i=1}^{m^2} \sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} \mathbb{E}(X_i X_j).$$

- Nach Korollar 3.4 gilt also

$$d_{TV}(P_{W_n^m}, \text{Poi}_\lambda) \leq 2(b_1 + b_2).$$

- Hierbei ist  $\lambda = \mathbb{E}W_k^m$  und für alle  $k \geq 1$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}W_k^m &= k e^{-\pi r_k^2} \\ &= e^{\log k - \pi r_k^2} \\ &= e^{-\beta}. \end{aligned}$$

- Für jedes  $k \geq 1$  gilt außerdem, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}X_i}{k/m^2 e^{-\pi r_k^2}},$$

und somit

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} b_1 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m^2} \left( k/m^2 e^{-\pi r_k^2} \pi (3r_k)^2 m^2/k \right)^2 \\ &= e^{-2\beta} \pi (3r_k)^2 / k. \end{aligned}$$

- Insbesondere geht dieser Ausdruck für  $k \rightarrow \infty$  gegen 0.
- Eine ähnliche Argumentation kann zur Abschätzung von  $b_2$  verwendet werden.
  - Beachte zunächst, dass

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = 0,$$

falls  $s_j$  im Kreis mit Radius  $r_k$  und Mittelpunkt  $s_i$  enthalten ist, da in diesem Fall die Ereignisse  $A_i^{k,m}$  und  $C_j^{k,m}$  nicht gleichzeitig eintreten können.

- Sei nun

$$\delta(r_k, x) = \nu_2(B(-(x/2, 0), r_k) \cup B((x/2, 0), r_k))$$

der Flächeninhalt der Vereinigungsmenge der Kreise  $B(-(x/2, 0), r_k)$  bzw.  $B((x/2, 0), r_k)$  mit dem Radius  $r_k$  und den Mittelpunkten  $-(x/2, 0)$  bzw.  $(x/2, 0)$ , die den Abstand  $x \geq 0$  voneinander haben.

- Da  $C_i^{k,m} \cap C_j^{k,m}$  das Leereignis eines Poissonprozesses in einem Gebiet beschreibt, dessen Fläche für  $m \rightarrow \infty$  und  $r_n < |s_i - s_j|$  gegen  $\delta(r_k, |s_i - s_j|)$  konvergiert, erhalten wir, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(X_i X_j)}{\left(\frac{k}{m^2}\right)^2 \exp(-\delta(r_k, |s_i - s_j|))} = 1.$$

- Für  $i \in \{1, \dots, m^2\}$  definieren wir nun die Ringumgebung  $\mathcal{A}_i$  durch

$$\mathcal{A}_i = \{j : r_k \leq |s_i - s_j| \leq 3r_k\}.$$

- Hiermit erhalten wir somit für jedes  $k \geq 1$ , dass

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} b_2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m^2} \sum_{j \in \mathcal{A}_i \setminus \{i\}} \left(\frac{k}{m^2}\right)^2 \exp(-\delta(r_k, |s_i - s_j|)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \sum_{j \in \mathcal{A}_i \setminus \{i\}} \left(\frac{k}{m^2}\right)^2 \exp(-\delta(r_k, |s_i - s_j|)) \\ &= k \int_{r_k \leq |x| \leq 3r_k} \exp(-\delta(r_k, |x|)) dx \\ &\leq k\pi(3r_k)^2 \exp\left(-\frac{3}{2}\pi r_k^2\right), \end{aligned}$$

wobei dieser Ausdruck gegen 0 geht für  $k \rightarrow \infty$ .

- Insgesamt ergibt sich also, das

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d_{TV}(P_{W_k^m}, \text{Poi}_\lambda) = 0$$

und, da  $W_k^m$  für  $m \rightarrow \infty$  f.s. gegen  $W_k$  konvergiert, folgt die Behauptung.  $\square$

Schließlich verallgemeinern wir noch das in Theorem 3.21 betrachtete Modell für das Anwachsen des Konnektivitätsradius  $r_k$  und setzen

$$r_k = \sqrt{\pi^{-1}(\log k + \beta_k)} \quad \text{für jedes } k = 1, 2, \dots, \quad (78)$$

wobei der additive Term  $\beta_k \geq 0$  nun von  $k$  abhängen kann.

Zunächst erwähnen wir das folgende Resultat, das sich mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Theorem 3.21 herleiten lässt.

### Korollar 3.5

- Für jedes  $k \geq 1$  sei  $r_k$  durch (78) gegeben und  $A_k$  bezeichne das Ereignis, dass der Graph  $G_k(r_k)$  keine isolierten Punkte besitzt.
- Es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k) = 1$  genau dann, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \infty$ .

Außerdem benötigen wir zwei Hilfsergebnisse, die im Zusammenhang mit dem so genannten *Minimum-Spanning-Tree* (MST) stehen, der durch die Einschränkung

$$V_k = \{S_n : S_n \in [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2\}$$

des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  auf das Quadrat  $B_k = [-\sqrt{k}/2, \sqrt{k}/2]^2$  induziert wird.

- Dabei ist  $\text{MST}(V_k)$  derjenige zusammenhängende Graph mit dem Eckpunktsystem  $V_k$ , dessen Gesamtkantenlänge minimal ist.
- Außerdem betrachten wir den *Nächster-Nachbar-Graph*  $\text{NNG}(V_k)$ , bei dem jeder Eckpunkt  $v \in V_k$  mit seinem nächsten Nachbarn in  $V_k$  (im Sinne der euklidischen Metrik) verbunden ist.

**Lemma 3.4** Seien  $M_k$  und  $N_k$  die Längen der längsten Kanten in  $\text{MST}(V_k)$  bzw.  $\text{NNG}(V_k)$ . Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_k = N_k) = 1. \quad (79)$$

Der *Beweis* von Lemma 3.5 ist tieflegend und geht über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus. Er kann in dem Zeitschriftenartikel von M. Penrose: The longest edge of the random minimal spanning tree. *Annals of Applied Probability* **7** (1997), 340–361, nachgelesen werden.

Darüber hinaus ist die folgende elementare Eigenschaft von  $r$ -Graphen nützlich.

### Lemma 3.5

- Wenn  $r_k > M_k$ , dann ist  $G_k(r_k)$  zusammenhängend.
- Wenn  $r_k < M_k$ , dann ist  $G_k(r_k)$  nicht zusammenhängend.

**Beweis**

- Die Entfernung  $|v - v'|$  zwischen zwei beliebigen Eckpunkten  $v, v' \in V_k$ , die in  $\text{MST}(V_k)$  miteinander verbunden sind, ist nicht größer als  $M_k$ .
- Aus  $r_k > M_k$  ergibt sich also, dass  $\text{MST}(V_k) \subset G_k(r_k)$  und somit dass  $G_k(r_k)$  zusammenhängend ist.
- Sei nun umgekehrt  $r_k < M_k$  und seien  $V'_k, V''_k \subset V_k$  die beiden (nicht miteinander verbundenen) Teilmengen von Eckpunkten in  $V_k$ , die entstehen, wenn die längste Kante in  $\text{MST}(V_k)$  (mit der Länge  $M_k$ ) entfernt wird.
- Dabei gilt  $|v' - v''| \geq M_k > r_k$  für beliebige  $v' \in V'_k$  und  $v'' \in V''_k$ .
- Hieraus ergibt sich, dass  $G_k(r_k)$  keine Kante  $(v', v'')$  mit  $v' \in V'_k$  und  $v'' \in V''_k$  enthält.
- D.h.,  $G_k(r_k)$  ist nicht zusammenhängend.

Insgesamt können wir nun das folgende Resultat formulieren.

**Theorem 3.22**

- Sei  $r_k = \sqrt{\pi^{-1}(\log k + \beta_k)}$  für jedes  $k = 1, 2, \dots$
- Der Graph  $G_k(r_k)$  ist genau dann a.a.s. zusammenhängend, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \infty$ .

**Beweis**

- Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \infty$  gilt, dann ergibt sich aus Korollar 3.5, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k) = 1$ , wobei  $A_k$  das Ereignis bezeichnet, dass der Graph  $G_k(r_k)$  keine isolierten Punkte besitzt.
- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Lemma 3.5, dass

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} P(N_k < r_k) \stackrel{(79)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} P(M_k < r_k).$$

- Wegen Lemma 3.5 bedeutet dies, dass  $G_k(r_k)$  a.a.s. zusammenhängend ist.
- Sei nun  $G_k(r_k)$  a.a.s. zusammenhängend. Dann gilt insbesondere  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k) = 1$ .
- Wegen Korollar 3.5 ergibt sich hieraus, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \infty$ .  $\square$

## 4 Zufällige Mosaike

In diesem Kapitel betrachten wir weitere Klassen von zufälligen geometrischen Graphen in der euklidischen Ebene, die durch Poissonsche Punktprozesse generiert werden.

- Dabei führen wir zunächst in Abschnitt 4.1 die Begriffe „Delaunay-Mosaik“ und „Voronoi-Mosaik“ ein, die spezielle Beispiele für zusammenhängende geometrische Graphen sind.
- Anschließend zeigen wir in Abschnitt ??, wie man Poisson-Delaunay-Mosaik und Poisson-Voronoi-Mosaik als stationäre Punktprozesse darstellen kann und diskutieren deren Eigenschaften.
- In Abschnitt ?? untersuchen wir dann Bernoulli-Bondperkolationen dieser Graphen.

### 4.1 Delaunay–Mosaik und Voronoi–Mosaik

**Definitionen** Sei  $\varphi = \{s_n\} \subset \mathbb{R}^2$  eine lokal endliche Teilmenge der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

- Das *Delaunay–Mosaik* auf  $\varphi$  ist ein geometrischer Graph (bezeichnet mit  $\text{Del}(\varphi)$ ) mit der Eckpunktmenge  $\varphi$  und der Eigenschaft, dass
  - $x, y \in \varphi$  genau dann durch eine Kante verbunden sind, falls es eine abgeschlossene Kreisscheibe  $B = \{z' \in \mathbb{R}^2 : |z' - z| \leq r\}$  gibt (für gewisse  $z \in \mathbb{R}^2$  und  $r > 0$  als Mittelpunkt bzw. Radius), so dass

$$x, y \in \partial B \quad \text{und} \quad \text{int}(B) \cap \varphi = \emptyset,$$

- wobei  $\partial B = \{z' \in \mathbb{R}^2 : |z' - z| = r\}$  und  $\text{int}(B) = \{z' \in \mathbb{R}^2 : |z' - z| < r\}$  den Rand bzw. das Innere von  $B$  bezeichnen.
- Ist  $X = \{S_n\}$  ein homogener Poissonprozess in  $\mathbb{R}^2$ , so wird der zufällige geometrische Graph  $\text{Del}(X)$  ein *Poisson–Delaunay–Mosaik* (PDM) genannt.
- Das *Voronoi–Mosaik* auf  $\varphi = \{s_n\}$  ist ein geometrischer Graph (bezeichnet mit  $\text{Vor}(\varphi)$ ), für den die Vereinigungsmenge  $E_\cup$  seiner Kanten gegeben ist durch

$$E_\cup = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z - s_i| = |z - s_j| = \inf_{s \in \varphi} |z - s| \text{ für ein Paar } s_i, s_j \in \varphi \text{ mit } s_i \neq s_j\}.$$

- Ist  $X = \{S_n\}$  ein homogener Poissonprozess in  $\mathbb{R}^2$ , so wird der zufällige geometrische Graph  $\text{Vor}(X)$  ein *Poisson–Voronoi–Mosaik* (PVM) genannt.

Schließlich benötigen wir noch den Begriff der Zellen von geometrischen Graphen in  $\mathbb{R}^2$ .

#### Definition

- Sei  $G = (V, E)$  ein geometrischer Graph in  $\mathbb{R}^2$  mit der (lokal endlichen) Eckpunktmenge  $V \subset \mathbb{R}^2$  und der Kantenmenge  $E \subset V \times V$ .
- Man sagt, dass die offene und zusammenhängende Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  eine *Zelle* von  $G$  ist, wenn

$$\partial B = \bigcup_{e \in E'} e \quad \text{und} \quad B \cap E_\cup = \emptyset,$$

- wobei  $\partial B = \text{cl}(B) \setminus B$  der Rand bzw.  $\text{cl}(B)$  die Abschließung von  $B$  sind
- und  $E' \subset E$  eine gewisse (nichtleere) Teilmenge von Kanten des Graphen  $G = (V, E)$  bzw.  $E_\cup = \bigcup_{e \in E} e$  die Vereinigungsmenge aller Kanten bezeichnen.

**Theorem 4.1** Sei  $X$  ein homogener Poissonprozess in  $\mathbb{R}^2$  mit Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ .

- Jede beschränkte Borel–Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  wird mit Wahrscheinlichkeit 1 jeweils nur von endlich vielen Kanten bzw. Zellen der Graphen  $\text{Del}(X)$  bzw.  $\text{Vor}(X)$  geschnitten.
- Die Zellen von  $\text{Del}(X)$  und  $\text{Vor}(X)$  sind mit Wahrscheinlichkeit 1 beschränkte konvexe Polygone.

**Beweis**

- Zunächst zeigen wir, dass für jedes  $n \geq 1$  das Quadrat  $Q_n = [-n/2, n/2]^2$  mit Wahrscheinlichkeit 1 nur von endlich vielen Kanten des Delaunay-Graphen  $\text{Del}(X)$  geschnitten wird.
- Hierfür genügt es zu zeigen, dass es mit Wahrscheinlichkeit 1 ein  $k \geq 1$  gibt, so dass für alle  $n \geq k$  die Endpunkte aller Kanten, die  $Q_n$  schneiden, in  $Q_{2n}$  enthalten sind.
  - Man kann sich leicht überlegen (Übung!), dass es eine Konstante  $c > 0$  und für jedes  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl  $m = m(n) \leq cn^2$  sowie Kreisscheiben  $B_1, \dots, B_m$  mit Radius  $\sqrt{n}$  gibt, so dass alle Kreisscheiben  $B$ , die  $Q_n$  schneiden und deren Durchmesser nicht kleiner als  $n/2$  ist, einen der Kreise  $B_1, \dots, B_m$  enthalten.
  - Wir nehmen nun an, dass  $\text{Del}(X)$  eine Kante besitzt, die  $Q_n$  schneidet, jedoch nicht in  $Q_{2n}$  enthalten ist.
  - Dann ist der Abstand zwischen den Eckpunkten dieser Kante nicht kleiner als  $n/2$ .
  - Folglich gibt es ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $X \cap B_i = \emptyset$ .
  - Insbesondere ist also die Wahrscheinlichkeit, dass  $\text{Del}(X)$  eine Kante besitzt, die  $Q_n$  schneidet, jedoch nicht in  $Q_{2n}$  enthalten ist, beschränkt durch  $\sum_{i=1}^{m(n)} P(X \cap B_i = \emptyset)$ , wobei

$$\sum_{i=1}^{m(n)} P(X \cap B_i = \emptyset) \leq cn^2 \exp(-\lambda\pi n).$$

- Weil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn^2}{\exp(\lambda\pi n)} < \infty,$$

ergibt sich aus dem Lemma von Borel–Cantelli, dass es mit Wahrscheinlichkeit 1 ein  $k \geq 1$  gibt, so dass für alle  $n \geq k$  die Endpunkte aller Kanten, die  $Q_n$  schneiden, in  $Q_{2n}$  enthalten sind.

- Hieraus folgt unmittelbar, dass  $Q_n$  mit Wahrscheinlichkeit 1 für jedes hinreichend große  $n$  nur von endlich vielen Zellen von  $\text{Del}(X)$  geschnitten wird.
- Sei nun  $(S_{i_1}, S_{i_2})$  eine beliebige Kante in  $\text{Del}(X)$  die  $Q_n$  schneidet.
  - Dann überlegt man sich leicht (Übung!), dass jede der beiden Halbebenen, die von  $(S_{i_1}, S_{i_2})$  erzeugt werden, genau einen weiteren Punkt  $S_j$  enthält, so dass alle Kanten im Dreieck  $(S_{i_1}, S_{i_2}, S_j)$  Kanten von  $\text{Del}(X)$  sind.
  - Zusammen mit obigem Ergebnis liefert dies die Behauptung für  $\text{Del}(X)$ .
- Ähnlich wie im ersten Teil des Beweises kann man zeigen, dass für jedes  $n \geq 1$  das Quadrat  $Q_n = [-n/2, n/2]^2$  mit Wahrscheinlichkeit 1 nur von endlich vielen Kanten des Voronoi-Graphen  $\text{Vor}(X)$  geschnitten wird.
- Hierfür zeigt man zunächst mit Hilfe des Lemmas von Borel–Cantelli, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 für jedes hinreichend große  $n$  das Zentrum  $S_i$  jeder Voronoi-Zelle, die  $Q_n$  schneidet, in  $Q_{2n}$  enthalten ist.
- Wir zeigen nun, dass die Zellen von  $\text{Vor}(X)$  beschränkt und konvex sind.
  - Man kann sich leicht überlegen, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 jede Zelle  $\text{Vor}(X)$  einen rationalen Punkt enthält.

- Aufgrund der Stationarität von  $X$  bzw.  $\text{Vor}(X)$  genügt es also, die Behauptung für die so genannte Nullpunkt-Zelle (die den Nullpunkt enthält) zu zeigen.
- Für jedes  $n > 0$  zerlegen wir das Quadrat  $Q_{5n}$  in kongruente Quadrate  $K_1, \dots, K_{25}$  mit der Seitenlänge  $n$  und bezeichnen mit  $A_n$  das Ereignis, dass  $X(K_i) \geq 1$  für jedes  $i = 1, \dots, 25$  gilt.
- man kann sich leicht überlegen (Übung!), dass das Ereignis  $A_n$  impliziert, dass die Voronoi-Zelle, die  $o$  enthält, in  $Q_{5n}$  enthalten ist.
- Außerdem gilt

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n^c) < \infty,$$

so dass sich die f.s. Beschränktheit der Nullpunkt-Zelle aus dem Lemma von Borel-Cantelli ergibt.

- Die Konvexität der Nullpunkt-Zelle ergibt sich nun aus der Tatsache, dass die Nullpunkt-Zelle von  $\text{Vor}(X)$  als Schnitt von (endlich vielen) Halbebenen dargestellt werden kann.  $\square$

**Korollar 4.1** *Sei  $X$  ein homogener Poissonprozess im  $\mathbb{R}^2$  mit Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ . Dann sind  $\text{Del}(X)$  und  $\text{Vor}(X)$  mit Wahrscheinlichkeit 1 zusammenhängend.*

#### Beweis

- In Theorem 4.1 hatten wir gezeigt, dass  $\text{Del}(X)$  und  $\text{Vor}(X)$  lokal endliche Zerlegungen der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  in beschränkte und konvexe Polygone generieren.
- Seien  $v_1$  und  $v_2$  zwei beliebige Eckpunkte einer Realisierung von  $\text{Del}(X)$  bzw.  $\text{Vor}(X)$ .
  - Dann liegen diese Eckpunkte auf dem Rändern der in Theorem 4.1 betrachteten Polygone.
  - Wegen der lokalen Endlichkeit dieser Polygone gibt einen Pfad von  $v_1$  nach  $v_2$  entlang dieser Polygon-Ränder, der aus endlich vielen Segmenten besteht.
- Hieraus ergibt sich die Behauptung.  $\square$